А. В. Шаповалов
И. В. Ященко

Вертикальная математика для всех

Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6 класса

А. В. Шаповалов
И. В. Ященко

Вертикальная математика для всех

Готовимся к задаче С6 ЕГЭ
с 6 класса

Издательство МЦНМО
2014

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
Ш24

Шаповалов А. В., Ященко И. В.

Ш24 Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6 класса. — М.: МЦНМО, 2014. — 128 с.
ISBN 978-4439-0579-2

Эта книга поможет научить школьников 6–8 классов и старше применять свои математические знания далеко за пределами обычной программы своих классов. Если традиционная «горизонтальная» математика пополняет знания вширь, то «вертикальная» ведет ввысь и вглубь, прививая навыки анализа в нестандартных ситуациях. Собранные в книге задачи и приёмы позволяют начать такое обучение заранее и на материале, близком к школьной программе и доступном широкому кругу учащихся. В итоге путающая многих задача ЕГЭ С6 становится несложным упражнением.

Книга предназначена для самостоятельной работы школьников, будет полезна и их родителям. Учителя могут на её основе вести кружки в 6–9 классах и готовить к ЕГЭ учеников 10–11 классов. Задачи из книги могут быть использованы как дополнительные (а иногда и подготовительные) при изучении соответствующих тем школьной программы.

ББК 22.1я72

Александр Васильевич Шаповалов
Иван Валериевич Ященко

ВЕРТИКАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ВСЕХ. ГОТОВИМСЯ К ЗАДАЧЕ С6 ЕГЭ С 6 КЛАССА

Подписано в печать 4.9.2013 г. Гарнитура Charter ITC. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 8. Тираж 5000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241-74-83, (495) 745-80-31.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-4439-0579-2

ВВЕДЕНИЕ

Математическая подготовка состоит из двух частей: знания математических формул и теорем и умения их применять. Важно уметь математически думать как в стандартных, так и в нестандартных ситуациях. Последнему, к сожалению, учат достаточно редко. Бытует заблуждение: это нужно лишь тем, кто обладает творческим мышлением и собирается посвятить свою жизнь точным наукам. Процент творчески мыслящих учеников действительно невелик, из них выходят победители олимпиад. Любопытно, однако: в науку из них идут лишь немногие, большинство оказываются востребованы в массовых профессиях — программисты, менеджеры, экономические аналитики. Но и менее успешные участники олимпиад, летних школ и математических кружков находят себя в этих профессиях. Востребованным оказывается умение разбираться в нестандартных ситуациях. А оно не столь уж редко. Вспомните, ведь и вам наверняка приходилось в такие ситуации попадать: отменили электричку, забыли дома кошелек, ключ перестал открывать дверь... В общем, стандартный способ перестал работать, но вы как-то разобрались и выкрутились. Скажем, применили какие-то знания или средства, о которых в нормальной ситуации и не вспоминали.

Ровно так же решаются и нестандартные задачи, в частности пресловутая задача С6 из ЕГЭ. Математических знаний для нее нередко хватает и семикласснику, но подводит неготовность разбираться в ситуации. Вот эту-то готовность кружковцы и олимпиадники в себе постоянно и тренируют, и она потом им помогает в жизни даже тогда, когда содержимое уроков оказывается забытым.

Традиционный курс математики в школе содержит, конечно, навыки анализа ситуации. Однако потребность в таких навыках возникает сравнительно редко и нерегулярно. Темы, где навыки нужны, заслуженно считаются сложными (например, математический анализ или решение неравенств с рациональными функциями). Кружковцы же с этими темами обычно справляются гораздо успешнее. Хитрость тут в том, что навыки и сложный материал они изучают по отдельности: навыки приобретаются в младших классах и на простом и интересном в этом возрасте материале, а сложный материал в старших классах ложится на уже подготовленную почву. Помогает и то, что привыкание к непростым навыкам происходит без спешки, в течение длительного периода, а не за короткие недели, отведенные на усвоение темы.

Данная книга призвана помочь заинтересованным школьникам научиться таким навыкам, а учителям — заблаговременно научить. Книга доступна школьникам начиная с 6 класса, подавляющее число задач по материалу относятся к алгебре 7–8 класса. Материал задач достаточно близок к школьному, но авторы старались выбирать интересные формулировки. Основной способ работы — самостоятельное решение задач, затем сравнение своих решений с приведенными в книге, чтение и осмысление решений и комментариев. Школьники могут заниматься сами или консультируясь с учителями, родителями, продвинутыми сверстниками. Учителя могут давать задачи как дополнительные на уроках, а также вести по материалам книги факультативы и кружки.

Мы надеемся, что книга не только повысит успеваемость проработавших ее школьников, но и поможет преодолеть барьер между школьной и кружковой математикой, а также барьер между изучением математики и ее применением.

Структура книги

Книга разбита на 6 разделов: 1. Простая арифметика. 2. Уравнения и неравенства. 3. Делимость и остатки. 4. Дроби, доли, средние. 5. Логика и перебор. 6. Задачи на максимум и минимум.

В каждом разделе есть несколько озаглавленных тем, представленных 3–4 задачами с подробными решениями и комментариями, а также список номеров дополнительных задач, подходящих по теме. После тем в каждом разделе идут дополнительные задачи раздела, среди которых есть и некоторые пункты задач С6. Они специально не выделены, чтобы показать, что в них нет ничего особого по сравнению с соседними задачами — ни по формулировкам, ни по трудности. Ответы и решения дополнительных задач вынесены в последнюю главу каждого раздела.

Помните, что дополнительные задачи предназначены для вдумчивого освоения тем и изложенных в них приемов. Они упорядочены по сложности, но приемы идут вразнобой. Не обольщайтесь частичными решениями: важно получить и правильный ответ, и его обоснование. Если найден только ответ, постарайтесь правильно объяснить (хотя бы самому себе) путь к нему. Если правильно выбран прием, а ответ неверный, постарайтесь понять причину ошибки. И учитесь придумывать способы проверять ответ, не заглядывая в книгу. Советы по проверке вы найдете в конце книги. Там же есть список использованных задач ЕГЭ.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Д. Блинков*. Классические средние в арифметике и геометрии. М.: МЦНМО, 2012. (Школьные математические кружки).

2. *Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин, К. М. Столбов, И. В. Ященко*. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. М.: МЦНМО, 2013.

3. *С. А. Дориченко, И. В. Ященко*. LVIII Московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач. М.: Теис, 1994.

4. *Л. Э. Медников*. Четность. М.: МЦНМО, 2009. (Школьные математические кружки).

5. *А. И. Сгибнев*. Делимость и простые числа. М.: МЦНМО, 2012. (Школьные математические кружки).

6. *П. В. Чулков*. Арифметические задачи. М.: МЦНМО, 2009. (Школьные математические кружки).

7. *А. В. Шаповалов*. Как построить пример. М.: МЦНМО, 2012. (Школьные математические кружки).

8. *А. В. Шаповалов*. Принцип узких мест. М.: МЦНМО, 2012.

1. ПРОСТАЯ АРИФМЕТИКА

Появление калькуляторов и компьютеров выявило, что искусство подсчета состоит вовсе не в умении выполнять четыре арифметических действия с данными числами: компьютеры делают это надежнее и быстрее. Но компьютер не может понять, с какими числами и какое действие надо совершить, чтобы получить результат, *нужный нам*. Попробуем с этим разобраться. Есть несколько простых приемов. Их полезно знать, хотя можно до таких приемов и самостоятельно догадаться. Важно усвоить, однако, что приемы эти — не набор ключей, перебирая которые, рано или поздно откроешь дверь, то есть решишь задачу. Могут быть решения, в которых не используется ни один из этих приемов, а могут использоваться и несколько. Поэтому наша цель — не только научиться приемам вычислений, но и освоить умение разбираться в связях внутри задачи. А когда разобрался, подходящий прием сам придет на ум.

Отбрось лишнее. Эффект «плюс-минус один». Дополнение

> В цирке. Нам для представления нужен одногорбый верблюд. Но в заявке лучше попросить двугорбого: все равно один горб «срежут».

При подсчетах бывает выгодно подсчитать больше чем надо, а потом лишнее вычесть. Главное — разобраться, что именно надо вычитать.

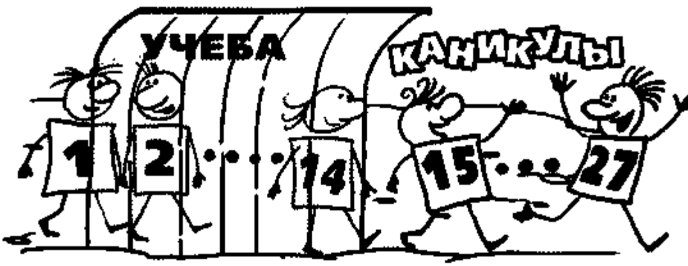
В следующей задаче часто ошибаются на 1.

1.1. Первый день каникул — 15 февраля, последний — 27 февраля. Сколько дней в каникулах?

Ответ: 13.

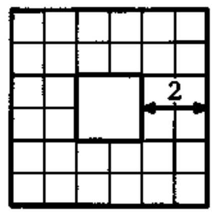
Решение. С 1-го по 27-е февраля — 27 дней. Из них в каникулы не входят дни с 1-го по 14-е, то есть 14 дней. Их надо вычесть. Значит, в каникулах $27 - 14 = 13$ дней.

Комментарий. Типичная ошибка: вычитая 15 из 27, получают 12. Но давайте проверим способ решения «на малых числах» (такую проверку программисты называют отладкой): если праздники с 15 по 17 февраля включительно, то вычитание $17-15$ дает ответ два, а непосредственный подсчет (отдыхаем 15-го, 16-го и 17-го) — 3 дня. Интуиция подсказывает, что и к 12 надо добавить 1. Но лучше, конечно, разобраться, что из чего вычитать. Чтобы избежать ошибки, ответьте на вопрос: какие дни в феврале *не* входят в каникулы? Сколько таких дней? Наглядно запомнить прием помогает картинка чисел, выходящих из-за забора (см. рис.)



1.2. В клетчатой рамке 6×6 толщиной в две клетки — 32 клетки (см. рисунок). А сколько клеток в рамке 16×16 такой же толщины?

Ответ: 112.



Решение. Представим, что рамка вырезалась из квадрата 16×16 (в нем было 256 клеток). Тогда была вырезана квадратная дырка. Отступая на 2 с двух сторон, мы уменьшили размер дырки на 4 по сравнению с исходным квадратом, то есть вырезали квадрат 12×12 (в нем 144 клетки). Итак, осталось $256-144=112$ клеток.

Комментарий. Типичная ошибка: считают, что ширина и высота дырки равна 14. И здесь помогает отладка: посмотрев на пример в условии, увидим, что размер дырки меньше размера внешнего квадрата на 4, а не на 2.

1.3. Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 *не* делится на 50?

Ответ: 980.

Решение. Легче вычислить, сколько чисел делится на 50. Ясно, что делится каждое 50-е число: $1 \cdot 50,\ 2 \cdot 50,\ \ldots,\ 20 \cdot 50 = 1000$. Отбросив эти 20 чисел, получим, что $1000-20=980$ чисел не делятся на 50.

Комментарий. Свойство «делится на 50» разбивает числа на два множества: те, что делятся, и те, что не делятся. Так можно разбить множество с помощью любого свойства: на те элементы, для которых оно выполняется, и на те, для которых оно не выполняется. Эти два множества являются *дополнением* друг к другу. Обычно количество элементов одного из множеств напрямую вычислить легче. Тогда количество элементов другого множества вычисляют путем *вычитания дополнения из целого.*

См. также задачи 1.10, 1.13, Д1.1, Д1.2, Д1.3, Д1.5, Д1.6, Д1.7, Д1.8, Д1.9, Д1.11, Д1.12, Д1.15, Д1.16, Д1.17, Д1.20, 2.1, 2.7, Д5.20б, Д6.8.

Считай по частям. Включение-исключение

При подсчетах можно разбивать множество на удобные части, то есть такие, для которых считать легко. Если части перекрываются, то посчитанное дважды надо вычесть.

1.4. Этим летом я приехал к морю утром 25 июня, а уехал вечером 12 августа. Сколько дней я пробыл у моря?

Ответ: 49.

Решение. Разумно разбить дни у моря по месяцам: июнь, июль, август. Дни августа — с 1-го по 12-е, их всего 12. В июле входят все дни, то есть 31 день. В июне из 30 дней надо отбросить дни не у моря: с 1-го по 24-е, останется $30-24=6$ дней у моря. Итого у моря я был $6+31+12=49$ дней.

1.5. У буквы Т на рисунке ширина 3 клетки, высота — 4 клетки, а толщина палочек — одна клетка. А сколько клеточек в букве Т, у которой ширина 13 клеток, высота — 20 клеток, а толщина палочек — 3 клетки?

Ответ: 90.

Решение. Разобьем Т на два прямоугольника, отрезав верхнюю перекладину. Перекладина — это прямоугольник 3×13 (в нем 39 клеток), а оставшаяся часть ножки — 17×3 (здесь 17 получено как $20-3$, а в прямоугольнике 51 клетка). Итого в букве Т $39+51=90$ клеток.

Комментарий. Разумеется, можно разбить и на 3 части: среднюю палочку 20×3 и два одинаковых куска от верхней перекладины 3×5. Или заключить Т в прямоугольник 20×12 и выкинуть два не входящих в Т малых прямоугольника под перекладиной.

1.6. В классе все любят играть в теннис или в шахматы. Шахматы любят 10 учеников, теннис — 15 учеников, и то, и другое — 6 человек. Сколько всего учеников в классе?

Ответ: 19.

Решение 1. Разобьем учеников на 3 группы: группа Ш любит только шахматы, группа Н — только теннис, а группа НШ — обе игры. В НШ 6 человек. В Ш и НШ вместе 10 человек, поэтому в Ш $10-6=4$ человека. В Н и НШ 15 человек, поэтому в Н $15-6=9$ человек. Итого, в трех группах (а значит, и в классе) $6+4+9=19$ человек.

Решение 2. Играть любят все, поэтому, сложив $10+15=25$, мы учтем всех в классе. При этом 6 любителей двух игр были учтены по 2 раза. Значит, результат на 6 больше нужного, то есть на самом деле в классе $25-6=19$ учеников.

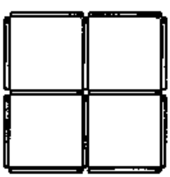
Комментарий. Формула включения-исключения позволяет подсчитать число объектов, обладающих хотя бы одним из двух свойств: складываем число объектов для каждого свойства и вычитаем «лишние», то есть те, которые обладают двумя свойствами одновременно (мы ведь их посчитали дважды).

См. также задачи Д1.14, Д1.15, Д1.17, Д1.20.

Одинаковые группы и умножение

Умножение хорошо работает там, где удается разбить множество на одинаковые по численности группы. При этом неважно, что групп будет много, лишь бы могли точно посчитать их количество и размер.

1.7. Если из спичек сложить клетчатый квадрат 2×2, то потребуется 12 спичек (см. рис). А сколько спичек надо, чтобы сложить клетчатый квадрат 12×12?



Ответ: 312.

Решение. Клетчатый квадрат состоит из горизонтальных и вертикальных отрезков. Длина такого отрезка равна стороне квадрата, поэтому в каждом — по 12 спичек. Вертикальных отрезков на один больше чем клеток в нижнем ряду: самый левый и по одному для правой стороны каждой клетки, то есть их 13. Столько же и горизонтальных отрезков. Значит, всего спичек $12 \cdot 13 \cdot 2 = 312$.

1.8. В дремучем лесу вот уже более 1000 лет живет Волшебная елка. Известно, что каждое утро на ней вырастают 100 иголок и каждая иголка живет ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько же иголок на Волшебной елке сегодня в полдень?

Ответ: 146 100.

Решение. Иголки, которые сейчас на елке, появились за последние 4 года. Здесь год — это промежуток между двумя одинаковыми датами, например между 20 июля и следующим 20 июля. Если между датами вклинилось 29 февраля, то в году 366 дней, иначе — только 365. Так как 29 февраля вклинивается ровно раз в 4 года, в четырех годах $365 + 365 + 365 + 366 = 1461$ день. В каждый из этих дней вырастало по 100 иголок, значит, всего на елке $100 \cdot 1461 = 146\,100$ иголок.

1.9. Между двумя селами по дороге 20 км. Два охотника вышли навстречу друг другу, каждый идет со скоростью 5 км/ч. Вместе с первым выбежала собака со скоростью 8 км/ч, добежала до второго охотника, развернулась, добежала до первого охотника, развернулась, снова добежала до первого охотника, и так бегала туда-сюда, пока охотники не встретились. Сколько всего километров пробежала собака?

Ответ: 16.

Решение. Охотники встретились посредине, каждый прошел по 10 км, значит, шел $10 : 5 = 2$ часа. За 2 часа собака пробежала всего $8 \cdot 2 = 16$ км.

Комментарий. Попытка разбить путь на части между встречами приводит к сложению большого числа неравных слагаемых. Здесь надо отбросить ненужные подробности и понять, что важны только скорость собаки и время беготни, а куда она при этом бегала — совершенно неважно...

См. также задачи Д1.4, Д1.10, Д1.12, Д1.17, 2.4, 2.5.

Считай добавки

Когда число получается как результат многих операций, бывает удобно отследить по шагам, как оно меняется. Тогда окончательный результат равен первоначальному числу плюс сумма всех добавок.

1.10. Мама резала на ломти два длинных батона. Всего она сделала 25 поперечных разрезов. Сколько ломтей хлеба получилось?

Ответ: 27.

Решение. Мы не знаем, сколько разрезов мама сделала на каждом из батонов, но это и не важно. Заметим, что при каждом разрезе один кусок распадается на два, то есть число кусков возрастает на 1. Считая каждый батон одним (хотя и большим) куском, видим, что сначала было два куска. Разрезами мама увеличила число кусков на 25, значит, получилось $2+25=27$ кусков-ломтей.

Комментарий. В задачах такого типа тоже часто делают «ошибку на 1», путая число разрезов с числом кусков. Полезно запомнить, что при разрезании одного батона кусков будет на 1 больше, чем разрезов (промежутков между кусками). Как ни распределяй разрезы на два батона, при переходе от числа разрезов к числу ломтей добавка равна 2. Значит, всего ломтей будет $25+2=27$.

1.11. В театральную студию ходит 33 ученика. Их сумма возрастов равна 333. А чему будет равна сумма их возрастов ровно через 2 года?

Ответ: 399 лет.

Решение. Возраст каждого из учеников увеличится на 2. Значит, сумма возрастов вырастет на $33\cdot 2=66$ лет. Поэтому вместе им будет $333+66=399$ лет.

1.12. На карточках были написаны числа 1, 2, 3, …, 111. Ваня взял себе все карточки с четными числами, а Таня — с нечетными. У кого из них сумма чисел на карточках больше и на сколько?

Ответ: у Тани на 56.

Решение. Поскольку 111 на два не делится, у Тани окажется на одну карточку больше. Чтобы утешить Ваню, изготовим для него еще карточку с числом 0 (на сумму она не влияет). Пусть теперь они выкладывают карточки парами друг против друга: сначала самые маленькие (0 против 1), потом следующие (2 против 3) и т.д. Получится $112:2=56$ пар. В каждой паре Танино число на 1 больше Ваниного, поэтому в сумме у Тани будет на 56 больше.

См. также задачи 1.13, Д1.5, Д1.7, Д1.11, Д1.13, Д1.15, Д1.17, Д1.18, Д1.19, 2.8, Д2.14, Д3.17, Д4.2.

Арифметическая прогрессия

Определение. Ряд чисел, идущих с постоянным шагом, называется *арифметической прогрессией*. В нем каждое число получается из предыдущего прибавление одного и того же числа d — *разности* прогрессии. Примеры: а) натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, …, б) 100, 92, 84, 76; в) $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, 4π, …

1.13. Чему равен 101-й член арифметической прогрессии 13, 33, 53, 73, …?

Ответ: 2013.

Решение. Нетрудно видеть, что на каждом шаге мы прибавляем 20. От первого до 101-го члена надо сделать 100 шагов (снова эффект «плюс-минус 1»!). Значит, всего нам надо прибавить $100\cdot20=2000$. Поэтому 101-й член равен $13+2000=2013$.

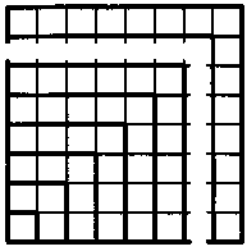
Комментарий. Мы применили прием «Считай добавки». С его помощью можно вывести формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a+(n-1)d$, где a — первый член, d — разность прогрессии.

1.14. Чему равна сумма первых сорока нечетных чисел?

Ответ: 1600.

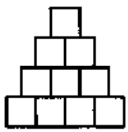
Решение. Нечетные числа идут с шагом 2, поэтому образуют арифметическую прогрессию. Как и в предыдущей задаче, подсчитаем, что 40-е число равно $1+39\cdot2=79$. Значит, надо вычислить сумму $1+3+5+\ldots+75+77+79$. Сгруппируем числа в пары: самое маленькое с самым большим, следующее маленькое — со вторым среди больших, и т. д. При переходе к следующей паре меньшее из чисел увеличивается на 1, а большее — уменьшается на 1, поэтому сумма не меняется. Поэтому мы получим 20 пар с одинаковыми суммами: $1+79=3+77=5+75=\ldots=80$. Общая сумма равна сумме сумм пар, то есть $20\cdot80=1600$.

Комментарий. 1. Разбиение на пары «первый с последним, второй с предпоследним и т. д.» встречается часто. Для арифметической прогрессии это, очевидно, дает пары с одинаковыми суммами. Если число слагаемых n четно, то на такие пары удается разбить всю сумму, и результат равен $\frac{(a+z)n}{2}$, где a — первое, а z — последнее число. Как ни странно, эта формула работает и при нечетном количестве чисел (тогда $\frac{n}{2}$ — не целое, но и число в серединке дает только полсуммы пары).



2. Равенство $1600 = 40^2$ — не случайность: сумма первых n нечетных чисел действительно всегда равна n^2. Это становится очевидным, если разбить клетчатый квадрат на «уголки»: числа клеток в уголках и будут последовательными нечетными числами.

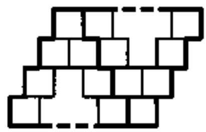
1.15. В клетчатой «пирамиде» высотой 4 всего 10 клеток (см. рис). А сколько клеток в устроенной таким же образом «пирамиде» высотой 50?



Ответ: 1275.

Решение 1. Число клеток в слоях увеличивается от 1 до 50 с шагом 1. Просуммируем полученную арифметическую прогрессию:

$$1+2+\ldots+50 = \frac{(1+50)\cdot 50}{2} = 1275.$$



Решение 2. Сложим две такие «пирамиды», как на рисунке. Тогда в каждом слое будет по 51 клетке, всего клеток $50 \cdot 51 = 2550$, и это число надо разделить на 2.

Комментарий. Запомните прием: может оказаться намного легче посчитать *удвоенное количество*. Так, записав второй экземпляр арифметической прогрессии под первым в противоположном порядке, получим равные суммы по вертикали, что сильно облегчит подсчет общей суммы. При этом не возникнет проблемы с «нецелыми парами».

См. также задачи Д1.16, Д1.19, Д3.23, Д6.7.

Умножение сумм и разностей

Если группа детей покупает одинаковые шоколадки, то расход денег каждого равен числу взятых им шоколадок, умноженному на цену шоколадки. Пусть, однако, известно общее число купленных шоколадок. Тогда суммарные затраты можно посчитать проще: умножить это общее число на цену шоколадки. Вообще, вместо того чтобы умножать на одно и то же число каждое слагаемое, а потом складывать результаты, можно сразу умножить сумму. То же верно и для разностей вместо сумм, и для деления вместо умножения.

1.16. Вчера капитан Врунгель поймал на 8 рыб больше матроса Фукса. Сегодня каждый из них поймал втрое больше рыб, чем вчера. Кто сегодня поймал больше рыб и на сколько?

Ответ: Врунгель, на 24.

Решение. Пусть вчера они наловили щук, а сегодня — пескарей. И пусть Врунгель разделил своих щук на две кучи: в одной столько, сколько у Фукса, в другой — остальные 8. Заменим каждую щуку на трех пескарей. Тогда у каждого станет сегодняшнее число рыб. По-прежнему у обоих будет по одинаковой куче рыб, а лишние будут у Врунгеля во второй куче, где $8 \cdot 3 = 24$ рыбы.

1.17. Каждый мальчик съел по 6 конфет, 2 котлеты и одному персику, а каждая девочка — по 8 конфет, одной котлете и 3 персика. Всего они съели 100 котлет и персиков вместе взятых. А сколько конфет?

Ответ: 200.

Решение. Заметим, что каждый съел вдвое больше конфет, чем котлет и персиков вместе. Значит, и всего конфет съедено вдвое больше, чем котлет и персиков вместе, то есть $2 \cdot 100 = 200$.

1.18. «А это вам видеть пока рано», — сказала Баба-яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников все-таки увидели то, что видеть пока рано?

Ответ: 22.

Решение. Посчитаем тех, кто ничего не увидел. Это те, кто закрыл оба глаза. Оба глаза закрыли ровно те мальчики, которые закрыли левый глаз, то есть треть мальчиков. Точно так же оба глаза закрыла треть девочек. Значит, по правилу умножения сумм ничего не увидела треть всех учеников, то есть $33:3=11$. А остальные $33-11=22$ все-таки подглядели то, что видеть было пока рано.

См. также задачи 2.9, Д4.12.

Дополнительные задачи

Д1.1. Сколько всего есть а) двузначных; б) трехзначных чисел?

Д1.2. При раскладывании пасьянса у Пети собрались все пики и все картинки (валеты, дамы и короли) без других карт. Сколько карт у Пети? (Напомним, что пики — одна из четырех мастей, карт в каждой масти поровну, а всего в колоде 52 карты.)

Д1.3. Сколько трехзначных чисел не делятся на 40?

Д1.4. В вершинах квадрата записали четыре числа. Их сумма равна 25. На каждой стороне написали число, которое равно сумме чисел в концах стороны. Чему равна сумма всех восьми записанных чисел?

Д1.5. Петя склеивал пазл из 16 частей. За одну минуту он склеивал два куска в один (причем кусок мог быть первоначальный или склеенный из нескольких первоначальных кусков). За сколько минут Петя склеил весь пазл?

Д1.6. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным, получится 5 кусков, если по желтым — 7 кусков, если по зеленым — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трех цветов?

Д1.7. Лесоруб одним ударом топора разбивает любой чурбак или полено на три части. Он хочет разбить чурбак на 33 части. Сколько ударов ему понадобится?

Д1.8. На каждой перемене Робин-Бобин съедал по шоколадке. Уроки были каждый день недели, кроме воскресенья, всего 29 уроков. Сколько шоколадок на переменах съел Робин-Бобин за неделю?

Д1.9. Вася купил 5 жетонов для игры в автомате. На каждую игру тратится жетон, но если выиграешь, получаешь бесплатно два жетона. Вася сыграл 17 раз. Сколько раз он выиграл?

Д1.10. Для каждого числа от 1 до 99 выписали его сумму цифр. Чему равна сумма всех выписанных чисел?

Д1.11. Улитка лезет на 10-метровый столб. За день она поднимается на 6 метров, а за ночь сползает на 5 метров. На какой день она доберется до вершины столба?

Д1.12. Груша и яблоко вместе весят 100 г, яблоко и апельсин — 120 г, груша и апельсин — 140 г. Сколько весят вместе яблоко, груша и апельсин? Сколько весит каждый фрукт по отдельности?

Д1.13. За столом сидели 20 человек. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял одну семечку, второй — две, третий — три, и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Пакет обошел вокруг стола больше 2 раз. На сколько больше было взято семечек на втором круге, чем на первом?

Д1.14. Сколько несократимых среди дробей $\frac{6}{100}, \frac{6}{101}, \ldots, \frac{6}{999}$?

Д1.15. Старик Хоттабыч может совершить чудо, вырвав из своей волшебной бороды один волос (при этом на месте двух вырванных волос вырастает один новый). Сколько всего чудес может совершить старик Хоттабыч, если первоначально в его бороде 2012 волос?

Д1.16. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые не делятся на 5.

Д1.17. Какие 500 идущих подряд натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 2013 цифр?

Д1.18. Юный маг научился фокусу превращать шарик в два шарика и пять роликов, и трюку по превращению четырех шариков в три кубика и два ролика. Он зашел в комнату, где были только шарики, и через некоторое время там оказались 1500 кубиков, 1500 роликов и ни одного шарика. Сколько шариков было в комнате сначала?

Д1.19. Надо было найти сумму чисел $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + \ldots + 9{,}8 + 9{,}9$, а результат округлить до целого. Вася сначала округлил каждое число до целого, а результаты сложил. Какой результат больше: Васин или правильный? На сколько?

Д1.20. В наборе 7 гирь. Арбуз можно уравновесить тремя гирями, можно четырьмя, а можно и пятью. Докажите, что одну из гирь набора можно уравновесить несколькими другими.

Ответы и решения

Д1.1. *Ответ*: а) 90; б) 900.

Решение. а) Из 99 чисел от 1 до 99 надо откинуть 9 однозначных: $99-9=90$.

б) Из 999 чисел от 1 до 999 надо откинуть 99 однозначных и двузначных: $999-99=900$.

Д1.2. *Ответ*: 22.

Решение. У Пети $52:4=13$ пик, и по 3 картинки в каждой из трех остальных мастей, итого $13+3\cdot3=22$ карты.

Д1.3. *Ответ*: 878.

Решение. На 40 делятся трехзначные числа 120, 160, 200, …, 960. В этом списке $(960-120):40=21$ промежуток между числами, значит, 22 числа. А всего есть 900 трехзначных чисел (см. задачу Д1.1). Поэтому на 40 *не* делятся $900-22=878$ чисел.

Д1.4. *Ответ*: 75.

Решение. Каждое число в вершине принадлежит еще и двум сторонам, поэтому было сосчитано трижды. Значит, и сумму надо утроить: $3\cdot25=75$.

Д1.5. *Ответ*: за 15 минут.

Решение. После каждой склейки число частей уменьшалось на 1. Из 16 кусков склеился один (весь пазл), значит, было $16-1=15$ уменьшений. На это потребовалось 15 минут.

Д1.6. *Ответ*: 21 кусок.

Решение. Чтобы разрезать на 5 кусков, надо сделать $5-1=4$ разреза. Значит, красных колец 4. Аналогично желтых колец 6, зеленых — 10. Итого на колбасе $4+6+10=20$ колец. Разрезав по ним, получим $20+1=21$ кусок.

Д1.7. *Ответ*: 16 ударов.

Решение. При каждом ударе число частей увеличивается на 2. Лесоруб хочет увеличить число частей на $33-1=32$. Для этого надо ударить $32:2=16$ раз.

Д1.8. *Ответ*: 23 шоколадки.

Решение. Между 29 уроками 28 промежутков. Промежуток — это перемена или ночь. Между 6 учебными днями было 5 ночей. Значит, перемен (и съеденных на них шоколадок) было $28-5=23$.

Д1.9. *Ответ*: 6 раз.

Решение. На 17 игр Вася потратил 17 жетонов. Из них он купил 5, значит, выиграл $17-5=12$. Каждый выигрыш приносит 2 жетона, значит, было $12:2=6$ выигрышей.

Д1.10. *Ответ*: 900.

Решение. Цифры 0 на сумму не влияют, а каждая ненулевая цифра 10 раз встречается в разряде единиц и 10 раз в разряде десятков. Поэтому сумма всех цифр равна

$$20(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=20\cdot 45=900.$$

Д1.11. *Ответ*: на пятый.

Решение. Первый день улитка закончит на высоте 6 м. Далее за каждую пару ночь+день она поднимается еще на метр. Чтобы подняться с 6 м до 10 м, ей надо $10-6=4$ таких пары. Вместе с первым днем это составит $1+4=5$ дней (а именно, улитка достигнет вершины столба вечером пятого дня).

Замечание. Распространенная ошибка: некоторые видят добавку в 1 м за пару день + ночь, после чего дают ответ 10 дней.

Д1.12. *Ответ*: вместе 180 г, апельсин 80 г, груша 60 г, яблоко 40 г.

Решение. Сложив указанные суммы: $100+120+140=360$ г, мы сосчитаем вес каждого из фруктов дважды. Значит, общий вес вдвое меньше: $360:2=180$ г. Теперь вес каждого фрукта можно сосчитать как дополнительный к весу двух других фруктов: апельсин весит $180-100=80$ г, груша весит $180-120=60$ г, яблоко весит $180-140=40$ г.

Д1.13. *Ответ*: на 400 семечек.

Решение. Получив пакет второй раз, человек должен взять на 20 семечек больше, чем в предыдущий раз: ведь каждый в круге обеспечил добавку $+1$, включая его самого. 20 человек взяли каждый на 20 семечек больше, итого все вместе взяли на $20\cdot 20=400$ семечек больше.

Д1.14. *Ответ*: 300 дробей.

Решение. Всего выписано $999-99=900$ дробей (см. задачу Д1.1). Посчитаем сначала число сократимых дробей. Дробь можно сократить на 2, на 3 или на 6. Заметим, что 2 и 3 — разные простые числа, следовательно, если дробь можно сократить и на 2, и на 3, то ее можно сократить и на 6. На 2 можно сократить, если знаменатель четный. Таких дробей ровно половина $900:2=450$. На 3 можно сократить, если знаменатель делится на 3. Таких дробей ровно треть (900 делится на 3, поэтому числа можно разбить на $900:3=300$ троек $(100, 101, 102)$, $(103, 104, 105)$, …, в каждой из которых ровно одно число делится на 3). Аналогично на 6 делятся $900:6=150$ знаменателей. Сложив числа, кратные 2, и числа, кратные 3, мы дважды учтем числа, кратные 6. Поэтому их надо вычесть. Итого сократимых дробей $450+300-150=600$. Количество несократимых дробей дополняет его до 900, то есть несократимых дробей $900-600=300$.

Д1.15. *Ответ*: 4025.

Решение. При совершении пары чудес количество волос в бороде Хоттабыча уменьшается на 1. Такие пары он может совершать, пока волос в бороде не меньше 2. Совершив 2011 пар чудес, Хоттабыч останется с бородой из двух волосков. Затем он совершит еще пару чудес, в бороде станет один волосок, и Хоттабыч совершит последнее чудо. Итого он совершит $2(2011+1)+1=4025$ чудес.

Д1.16. *Ответ*: 396 000.

Решение. Сначала найдем сумму всех трехзначных чисел:

$$\frac{900(100+999)}{2}=494\,550.$$

Потом найдем сумму трехзначных чисел, делящихся на 5. Их

$$900:5=180,$$

и они образуют арифметическую прогрессию с разностью 5:

$$100+105+\ldots+995=\frac{180(100+995)}{2}=98\,550.$$

Осталось отбросить лишнее — вычесть вторую сумму из первой: $494\,550-98\,550=396\,000$.

Д1.17. *Ответ*: 9513, 9514, …, 10 012.

Решение. Если все числа не более чем четырехзначны, то цифр не более $4\cdot 500=2000$ — недостаточно. Если все числа не менее чем пятизначны, то цифр не менее $5 \cdot 500 = 2500$ — больше, чем надо. Значит, часть чисел четырехзначна, а часть — пятизначна. Замена четырехзначного числа на пятизначное добавляет одну цифру. При всех четырехзначных числах нам не хватает 13 цифр. Значит, надо взять 13 пятизначных чисел — самых первых:

$$9999+1,\ 9999+2,\ \ldots,\ 9999+13=10\,012.$$

Вычисляя разность $10\,012-500=9512$, найдем самое большое четырехзначное, которое мы не взяли. Отсюда ответ.

Д1.18. *Ответ*: 1900.

Решение. Кубики появлялись только при трюках, по 3 за трюк, поэтому было сделано $1500:3=500$ трюков. Эти трюки уменьшили число шариков на $4 \cdot 500 = 2000$ и увеличили число роликов на $2 \cdot 500 = 1000$. Значит, остальные 500 роликов возникли при фокусах, по 5 за фокус. Тогда было $500:5=100$ фокусов, при каждом число шариков увеличивалось на 1, то есть всего добавилось 100 шариков. Если вначале было x шариков, а в конце их не осталось, то $x+100-2000=0$, откуда $x=1900$.

Д1.19. *Ответ*: Васин результат на 5 больше правильного.

Решение 1. Числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 0,1. Каждое число в 10 раз больше своего номера, поэтому всего выписано 99 чисел. Их сумма равна $\frac{99(0{,}1+9{,}9)}{2}=495$. Если же сначала округлить, получим сумму

$$0+0+0+0+1+\ldots+1+2+\ldots+9+10+10+10+10+10.$$

Слагаемое 0 встретилось 4 раза, слагаемое 10 — 5 раз, остальные — по 10 раз. Тогда сумма равна

$$4\cdot 0+10(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+5\cdot 10=0+450+50=500.$$

Итак, Васин результат на $500-495=5$ больше правильного.

Решение 2. Сгруппируем числа с одинаковой целой частью в пары так, чтобы сумма в паре была целой: (0,1; 0,9), (4,3; 4,7) и т. п. Без пар останутся 9 целых чисел и 10 полуцелых: 0,5, 1,5, ..., 9,5. Суммы в парах и сумма полуцелых — целые числа, поэтому и общая сумма целая. Значит, правильный результат при округлении не меняется. Посмотрим теперь, как будет меняться сумма при округлении слагаемых. В каждой паре одно число округлится с недостатком, другое — с избытком, сумма не изменится. Округление целых чисел ничего не меняет. При округлении полуцелых каждое из них увеличится на 0,5. Значит, общая сумма увеличится на $10 \cdot 0{,}5 = 5$.

Д1.20. *Решение.* Пусть два набора гирь весят одинаково. Если некоторая гиря входит в оба набора, то, выкинув ее из каждого набора, снова получим два набора одинакового веса.

Заметим, что веса гирь, оставшихся от каждого взвешивания, тоже равны. Значит, некий вес можно уравновесить двумя, тремя и четырьмя гирями. Если эта двойка гирь пересекается с тройкой или четверкой, то, выкинув общую гирю, уравновесим оставшуюся от двойки. Если нет, то тройка и четверка обязаны пересечься по двум гирям, иначе гирь (вместе с двойкой) всего больше семи. Выкинув общую пару гирь из этих наборов, получим, что одна оставшаяся от тройки гиря равна по весу двум гирям, оставшимся от четверки.

Школьная программа традиционно обращает больше внимания на умение решать готовые уравнения и неравенства, чем на умение записать условия задачи в виде уравнений и неравенств и затем применить их для решения задачи. Между тем первое без второго не имеет большого смысла: знания без применения мертвы. Если удалось составить уравнения и неравенства, то ситуация понята, переведена с нечеткого «обычного» языка на строгий математический и выбран могучий инструмент для ее дальнейшего исследования! Такому за месяц не научишь. Значит, приучать надо постепенно, и чем раньше начнешь, тем лучше.

Часто недооценивается и предварительная подготовка к работе с неравенствами. Их вводят с помощью алгебры. На неподготовленного школьника они сваливаются, как снежный ком. Неудивительно, что на алгебраическом языке простые и естественные свойства неравенств выглядят сложными и загадочными. Между тем эти свойства известны и понятны с раннего возраста; поэтому можно и нужно вовлечь их в работу до всякой алгебры.

Обратный ход

Иногда бывает нужно по конечному результату восстановить то, что было вначале. Для этого проделывают весь путь в обратном порядке, или, на языке компьютеров, «откатывают» выполненные действия по одному. Надо только помнить простое правило «откатывания» цепочки действий: обратные действия и выполняются в обратном порядке. Скажем, если, одеваясь, я надел сначала рубашку, потом свитер, потом пальто, то раздеваться буду так: сначала сниму пальто, потом свитер, потом рубашку.

Уравнения, где «икс» встречается ровно один раз, тоже удобнее решать, совершая обратные действия, начиная с последнего.

2.1. Женщина собрала в саду яблоки. Выходила она из сада через 3 двери, и возле каждой двери стражник отбирал у нее половину яблок. Домой она принесла только 4 яблока. Сколько яблок отобрали стражники?

Ответ: 28 яблок.

Решение 1. Каждый брал столько, сколько оставлял. Рассмотрим проходы через двери «с конца». Последний стражник оставил 4 яблока, значит, и взял 4. Поэтому перед последней дверью у женщины оставалось 8 яблок. Итак, второй стражник оставил женщине 8 яблок, значит, и взял 8. Поэтому перед второй дверью у женщины было 16 яблок. Значит, первый взял 16 яблок. А всего стражники взяли $16+8+4=28$ яблок.

Решение 2. Если снять все на пленку и запустить ее задом наперед, то при проходе через каждую дверь число яблок у женщины будет удваиваться. Умножая три раза на два, узнаем, что женщина собрала $4\cdot2\cdot2\cdot2=32$ яблока. Значит, стражники отобрали $32-4=$ $=28$ яблок.

2.2. За билетами на концерт стояла очередь школьников. Из подошедшего автобуса в очередь к знакомым влезло еще несколько школьников так, что между каждыми двумя соседями влез один человек. То же случилось с новой очередью, когда подошел еще один автобус. Так же увеличивалась очередь еще после двух автобусов. Теперь в ней стоят 177 человек. А сколько человек было в очереди перед приходом первого автобуса?

Ответ: 12.

Решение. Промежутков в очереди на 1 меньше, чем людей. Поэтому каждый раз добавляется на одного человека меньше, чем было. Такого увеличения можно добиться иначе: добавить столько, сколько было (то есть удвоить), а затем одного человека выгнать (вычесть 1). Обратная операция – это добавить 1 и разделить на 2. Ее надо проделать 4 раза, начав с числа 177. Получим $(177+1):2=$ $=89$, $(89+1):2=45$, $(45+1):2=23$, $(23+1):2=12$.

2.3. $5\cdot((2013-99:x):10+2)-999=1$. Найдите x.

Ответ: 3.

Решение. Последним выполнялось вычитание. Обозначив уменьшаемое y, получим $y-999=1$. Значит, $y=999+1=1000$, то есть $5\cdot((2013-99:x):10+2)=1000$. Теперь последним выполнялось умножение. Значит, второй сомножитель равен

$$(2013-99:x):10+2=1000:5=200.$$

Так, откатывая по одному действию, последовательно получаем

$$(2013-99:x):10=200-2=198;$$
$$2013-99:x=198\cdot 10=1980,$$
$$99:x=2013-1980=33, \quad x=99:33=3.$$

Комментарий. Здесь обратное действие сводится к решению простейшего уравнения. При этом арифметическое действие не обязательно заменяется на противоположное. Так, вычитание неизвестного «откатывается» вычитанием, а деление на неизвестное — делением же.

См. также задачи Д2.1, Д2.4, Д2.7, Д2.9, Д2.13, Д2.18, Д6.19.

Подсчет двумя способами

Одна голова — хорошо, а две — лучше.

Если что-то можно подсчитать двумя разными способами, это всегда можно использовать. Второй подсчет поможет проверить первый. Из двух вариантов можно выбрать тот, что короче для записи. Самое же главное: если результаты выглядят по-разному, то может получиться либо противоречие (и мы поймем, что таких объектов не бывает), либо уравнение (и это поможет нам найти что-то неизвестное).

2.4. В классе учатся 19 мальчиков и 6 девочек. На 8 марта каждый мальчик принес по 3 цветка и подарил их одноклассницам. Все девочки, кроме Маши, получили по 9 цветков. Сколько цветков получила Маша?

Ответ: 12 цветков.

Решение. Подсчитаем общее число подаренных цветков: сначала с точки зрения мальчиков, потом с точки зрения девочек. Мальчики подарили $19\cdot 3=57$ цветков. Из них девочкам без Маши было подарено $5\cdot 9=45$ цветков. Значит, Маше подарены остальные $57-45=$ $=12$ цветков.

2.5. Можно ли расставить на некоторые поля шахматной доски по шашке, чтобы не было пустых рядов, на всех вертикалях шашек было поровну, а на любых двух горизонталях — не поровну?

Ответ: нельзя.

Решение. На горизонтали может стоять от 1 до 8 шашек. Чтобы числа не повторялись, каждое из чисел от 1 до 8 должно встретиться ровно по разу. Значит, всего должно быть $1+2+\ldots+8=36$ шашек. А складывая по вертикалям, мы должны умножить число шашек на вертикали на 8. Однако 36 на 8 не делится. Противоречие. Значит, так расставить нельзя.

2.6. В таблицу 3×3 записаны числа. Сумма трех чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали равна 111. Найдите число в центральной клетке таблицы.

Ответ: 37.

Решение. Сложив суммы трех столбцов, получим, что сумма всех записанных чисел равна 333. Сложим теперь все ряды, проходящие через центр. Их 4: строка, столбец и две диагонали. Сумма равна 444. В нее центральное число входит четырежды, а остальные — ровно по разу. Три экземпляра центрального числа и дают избыток в $444-333=111$. Значит, центральное число равно $111:3=37$.

См. также задачи Д2.3, Д2.14, Д2.17, Д3.24

Уравнения

В практических задачах важнее правильно составить уравнение, чем его решить. Решить потом сумеет программа или специалист-математик, а правильно составить (и применить решение) — только тот, кто разбирается в соответствующей области знаний.

Основной прием: принять что-то (например, то, что нужно узнать) за неизвестное, выразить через него что-то *двумя способами* и приравнять эти два выражения. Важно также понимать, какие значения может принимать неизвестные (например, только целые или только положительные). При составлении выражений применяются все те же приемы, что и при подсчетах.

При решении уравнений полезно помнить, что произведение равно 0, только если какой-то из сомножителей равен 0. В частности, если неизвестное входит в несколько сомножителей, то надо проверять на равенство нулю каждый из них: у уравнения может быть несколько решений.

2.7. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько сыновей и дочерей у их мамы с папой?

Ответ: 4 сына и 3 дочери.

Решение. Пусть x — число сыновей. Мальчик себе не брат, поэтому братьев у него $x-1$ (эффект плюс-минус 1). Тогда сестер у мальчика тоже $x-1$, и это равно числу дочерей. Девочка себе не сестра, поэтому сестер у нее на 1 меньше, чем дочерей, то есть $x-2$, а братьев x. По условию $x=2(x-2)$, откуда $x=4$.

2.8. Коля и Вася за осень получили по 60 оценок, причем Коля получил пятерок столько же, сколько Вася четверок, четверок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася пятерок. При этом средний балл у них одинаковый. Сколько двоек за осень получил Коля?

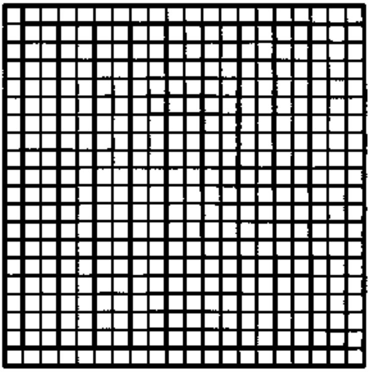
Ответ: 15 двоек.

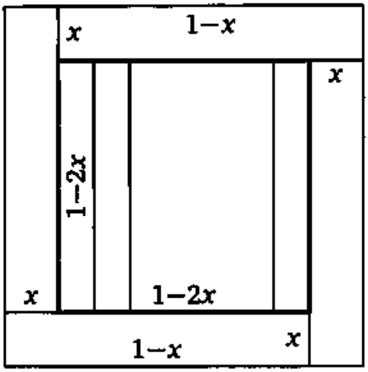
Решение. Поскольку число оценок и средние баллы одинаковы, то равны и суммы оценок. Пусть Коля получил d двоек и $6-d$ других (хороших) оценок. Будем считать добавки. Каждая хорошая оценка добавляет Коле лишний балл по сравнению с Васей, а каждая двойка отнимает 3 балла. Сумма добавок равна 0 ввиду равенства сумм оценок, то есть $(60-d)-3d=0$. Отсюда $d=15$.

2.9. Можно ли разрезать квадрат на 13 прямоугольников (возможно, не одинаковых) с одинаковым периметром, вдвое меньшим, чем у квадрата?

Ответ: можно. Например, на рис. слева квадрат со стороной 20 разбит на 4 прямоугольника 1×19 и 9 прямоугольников 2×18.

Решение. Пусть сторона квадрата равна 1, тогда периметры прямоугольников должны быть равны 2. Если резать квадрат на одинаковые параллельные полоски, то их периметры больше 2. Однако квадрат можно уменьшить, отрезав по кругу 4 прямоугольника размера $x\times(1-x)$, тогда, возможно, оставшийся квадрат можно будет разрезать на 9 прямоугольных полосок периметра 2 (см. рис. справа). Осталось подобрать нужное значение x. Сторона внутреннего квадрата равна $1-2x$, размер внутренней полоски $(1-2x)\times\frac{1-2x}{9}$, ее периметр равен $2\left((1-2x)+\frac{1-2x}{9}\right)=\frac{20(1-2x)}{9}$. Из уравнения





$\frac{20(1-2x)}{9}=2$ находим $x=0{,}05$. Если все размеры умножить на 20, то получим целочисленный пример из ответа.

См. также задачи Д2.6, Д2.16, Д2.19, Д6.21а.

Простейшие свойства неравенств

К неравенствам можно и нужно приучаться до и независимо от изучения алгебры.

Простейшие свойства неравенств очевидны из здравого смысла.

1. Цепочка неравенств: если Петя выше Васи, а Вася выше Маши, то Петя выше Маши.

2. Равенство из неравенств: Если Пете досталось не меньше Васи, а Васе — не меньше Пети, то им досталось поровну.

3. Сложение неравенств: если чемодан тяжелее сумки, а рюкзак тяжелее портфеля, то чемодан с рюкзаком вместе тяжелее сумки с портфелем.

4. Умножение и деление неравенств: если 6 пеналов дороже 20 карандашей, то 18 пеналов дороже 60 карандашей (умножили все на 3), а 3 пенала дороже 10 карандашей (поделили все на 2).

Опираясь на эти свойства, можно с помощью рассуждений и несложных вычислений выяснять, что больше или тяжелее в менее очевидных случаях. Таким образом, к моменту изучения алгебраических неравенств у учащихся накопится большой опыт по их применению и проверке.

2.10. В горку на велосипеде Петя едет вдвое медленнее, а под горку — вдвое быстрее, чем по ровной дороге. Что он сделает быстрее — спустится с горки и поднимется обратно или проедет такой же по длине путь по ровной дороге?

Ответ: быстрее по ровной дороге.

Решение. Путь по ровной дороге вдвое длиннее пути в горку, а скорость в горку — вдвое меньше. Поэтому эти два пути займут одинаковое время. Но ко времени подъема надо ведь еще добавить время спуска...

2.11. Семь карандашей дешевле пяти тетрадей. Что дороже: девять карандашей или семь тетрадей?

Ответ: 9 карандашей.

Решение. Ясно, что 7 карандашей тем более дешевле семи тетрадей. Значит, карандаш дешевле тетради, и два карандаша дешевле двух тетрадей. Прибавляя дешевое к дешевому, а дорогое к дорогому, получаем, что $7+2$ карандашей дешевле, чем $5+2$ тетрадей.

2.12. На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стер в каждом из чисел, неизвестно). На доске осталось:

$$11\ldots73 \times 12\ldots65 = 123\ldots45.$$

Могло ли исходное равенство быть верным?

Ответ: не могло.

Решение. Уменьшим сомножители, заменив нулями все цифры, начиная с третьей слева. Тогда и произведение уменьшится. Получим

$$11\mathbf{0\ldots0} \times 12\mathbf{0\ldots0} = 132\mathbf{0\ldots0} < 123\ldots45.$$

Увеличим теперь сомножители числа и тоже перемножим:

$$2\mathbf{00\ldots0} \times 2\mathbf{00\ldots0} = 4\mathbf{000\ldots0} > 123\ldots45.$$

Число жирных нулей справа и слева от знака равенства одинаково в обоих произведениях, поэтому произведения имеют одинаковое число разрядов. Но тогда и произведение исходных чисел имело то же число разрядов и должно было начинаться на трехзначное число от 132 до 400. Значит, на 123 оно начинаться не могло.

Комментарий. Умение получать оценки (неравенство) за счет округления до одной-двух значащих цифр очень важно на практике. Тут надо приучить учащихся говорить не просто «произведение $2013 \cdot 458$ примерно равно 900 000», а еще и уточнять: «но оно чуть больше 900 000».

См. также задачи Д2.2, Д2.8, Д2.11, Д2.14, Д2.20, Д3.24б, Д5.20а, Д6.18, Д6.20.

Неравенства с целыми числами

Если неизвестное целое число n сравнивается с известным не целым числом, неравенство можно усилить: например, $n \geqslant 7{,}01$ можно заменить на $n \geqslant 8$. Строгое неравенство с целыми числами можно усилить до нестрогого: например, $x < 7$ заменить — на $x \leqslant 6$, а $m < n$ — на $m \leqslant n-1$.

Еще полезно помнить, что натуральный делитель не больше натурального делимого, то есть если $n > 0$ и n делится на 55, то $n \geqslant 55$.

Из равенства величин можно получить уравнение, а из него найти неизвестное, часто однозначно. А из неравенства, как кажется, неизвестное не определишь: ведь таких чисел много! Однако два неравенства могут задать границы для неизвестного. И если неизвестное — целое число, то таких целых может быть мало. Бывает, что такое число всего одно, и, значит, оно сразу определяется.

2.13. Давным-давно в СССР 8 пончиков стоили меньше рубля, а 9 пончиков — больше рубля. Сколько копеек стоил один пончик?

Ответ: 12 копеек.

Решение. Пусть пончик стоил x копеек, тогда $8x < 100$, а $9x > 100$. Значит, $11\frac{1}{9} < x < 12{,}5$. Но между $11\frac{1}{9}$ и 12,5 только одно целое число: 12.

2.14. Петя задумал трехзначное число. За один вопрос Вася может назвать любое целое число и узнать, делится ли задуманное на него. Может ли Вася за 11 вопросов определить, простое или составное число задумал Петя?

Ответ: может.

Решение. Васе достаточно узнать, не делится ли задуманное число на какое-нибудь из чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 или 31.

Простое число не разделится, а составное обязательно разделится. Действительно, составное число можно разложить в произведение двух меньших чисел, больших 1. Если оба сомножителя не меньше 32, то их произведение не меньше $32^2 = 1024$, то есть как минимум четырехзначно. Значит, меньший сомножитель $m < 32$, то есть $m \leqslant 31$. У m есть простой делитель $p \leqslant m \leqslant 31$. Он будет делителем задуманного числа. Но мы проверили все простые делители, не превосходящие 31.

Замечание. В общем случае верно, что если число N составное, то у него есть простой делитель $p \leqslant \sqrt{N}$.

2.15. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух соседних четных чисел?

Ответ: не может.

Решение 1. Пусть последовательные числа — это n и $n+1$, а соседние четные числа — это m и $m+2$. Если $m \geqslant n$, то $m+2 > n+1$, поэтому $m(m+2) > n(n+1)$. Если же $m < n$, то $m+2 \leqslant n+1$, и поэтому $m(m+2) < n(n+1)$.

Решение 2. Пусть $m(m+2) = n(n+1)$. Тогда

$$(m+1)^2 = m(m+2)+1 = n(n+1)+1 = n^2+n+1.$$

Но $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$, то есть $n^2 < (m+1)^2 < (n+1)^2$, откуда $n < m+1 < n+1$, то есть целое число $m+1$ лежит между соседними целыми, что невозможно.

См. также задачи Д2.10, Д2.11, Д2.21, Д6.2, Д4.18, Д4.19, Д6.2, Д6.21в.

Неравенства с дробями

Когда в старших классах изучаются неравенства с неизвестным в знаменателе, они вызывают у многих учащихся большие трудности. Корни трудностей лежат в неумении сравнивать дроби. Одни не догадываются привести дроби к общему знаменателю, другие затрудняются с алгебраическими выкладками. Главное же: когда задачи оторваны от реального опыта, интуиция перестает работать, и любой ответ выглядит одинаково правдоподобным. Между тем житейских ситуаций на сравнение дробей немало. И, поняв их связь с математикой, учащиеся смогут сравнивать дроби почти без вычислений. Правило «дробь тем меньше, чем больше знаменатель» легче всего усвоить на житейских примерах. Не стесняйтесь обсудить со школьниками математическое содержание поговорок вроде «меньше народу — больше кислороду».

С каждой дробью связано еще и такое неравенство: в любой ее записи знаменатель не меньше, чем в записи дроби как несократимой.

2.16. Что лучше в жару: две бутылки холодного напитка на пятерых или три такие же бутылки на семерых?

Ответ: лучше три на семерых.

Решение. Раздадим в обоих случаях по бутылке на двоих, и тут и там один останется без бутылки, остальные получат по полбутылки. Чтобы всем досталось поровну, они должны поделиться с тем, кому не досталось. Но в первом случае делиться должны четверо, а во втором — шестеро. Поэтому во втором случае напитка останется побольше, что в жару лучше.

Комментарий. В отличие от приведения к общему знаменателю, такое рассуждение понятно даже грузчикам с 3 классами образования: в таких практических делах они не ошибаются.

2.17. Числитель обыкновенной дроби увеличили на 1, а знаменатель — на 1000. Могла ли дробь увеличиться?

Ответ: да.

Решение. Например, $\frac{2}{2012} > \frac{3}{3012}$, так как левая дробь после сокращения равна $\frac{1}{1006}$, а правая — $\frac{1}{1004}$.

Путь к решению. Кажется, что такое невозможно, потому что к числителю прибавили «мало», а к знаменателю — «много». Но ведь «много» и «мало» — понятия относительные, зависят от того, с чем сравнивать. Прибавление 1 к малому числителю может увеличить его заметно, а прибавление 1000 к большому знаменателю может быть малозаметным.

Замечание. Можно проверить, что увеличится любая дробь, меньшая $\frac{1}{1000}$, а вот большая $\frac{1}{1000}$ — уменьшится.

2.18. Каково наименьшее число учеников в классе, где доля мальчиков равна 55%?

Ответ: 20.

Решение. Запишем 55% как обыкновенную дробь: $55\% = \frac{55}{100}$. Если сократить эту дробь, получим $\frac{11}{20}$. Отношение числа мальчиков к числу учеников в классе равно этой дроби. Но любая дробь, равная несократимой, получается из нее умножением числителя и знаменателя на одно и то же целое число! Поэтому ее знаменатель, то есть число мальчиков, не может быть меньше 20. Значение 20, очевидно, подходит: в классе 20 учеников, из которых 11 — мальчики.

2.19. а) Докажите, что если числа a, b, A, B натуральные, то дробь $\frac{a+b}{A+B}$ лежит между дробями $\frac{a}{A}$ и $\frac{b}{B}$. б) Докажите то же для положительных (возможно, не целых) чисел.

Решение. а) Пусть группе из A человек выдали a бутылок воды, а группе из B человек — b бутылок. Разделим в каждой из групп воду поровну. Тогда в первой группе каждый получит по $\frac{a}{A}$ бутылки, а во второй — по $\frac{b}{B}$. Если $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$, то $a+b$ бутылок разделены поровну между $A+B$ людьми. Но тогда каждый получил по $\frac{a+b}{A+B} = \frac{a}{A} = \frac{b}{B}$. Если же дроби не равны, без ограничения общности можно считать, что $\frac{a}{A} < \frac{b}{B}$. Чтобы у всех стало поровну (то есть по $\frac{a+b}{A+B}$), можно попросить каждого человека из второй группы отлить по чуть-чуть воды каждому из первой группы. Но это и означает неравенство $\frac{a}{A} < \frac{a+b}{A+B} < \frac{b}{B}$.

б) Если $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k$, то $a = kA$, $b = kB$, поэтому $a + b = kA + kB = k(A+B)$, откуда и $\frac{a+b}{A+B} = k$.

Пусть теперь $\frac{a}{A} = k < m = \frac{b}{B}$. Тогда $a = kA$, $b = mB$, откуда

$$k(A+B) = kA + kB < kA + mB = a + b < mA + mB = m(A+B).$$

Поделив на $A+B$, получим

$$\frac{a}{A} = k < \frac{a+b}{A+B} < m = \frac{b}{B}.$$

См. также задачи Д2.5, Д2.15, Д2.21, Д4.3, Д4.14, Д5.19, Д6.22.

Дополнительные задачи

Д2.1. Задумай число, прибавь к нему 3, умножь результат на 4, отними от произведения 5 и скажи мне, сколько получилось. Как мне теперь узнать задуманное число?

Д2.2. Маша, Даша, Веня и Сеня собирали грибы. Маша собрала больше всех, Даша — не меньше Вени. Правда ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

Д2.3. Можно ли в прямоугольную таблицу 5×6 поставить числа так, чтобы в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке — отрицательна?

Д2.4. Предложил черт лодырю: «Всякий раз, как ты перейдешь через этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки». Трижды перешел лодырь мост — и остался совсем без денег. Сколько было у него денег первоначально?

Д2.5. У правильной обыкновенной дроби числитель и знаменатель увеличили на 1. Уменьшилась дробь или увеличилась?

Д2.6. Маша вышла из дома, через 12 минут оттуда же вышли Миша и Тиша. Миша шел вдвое быстрее Тиши и догнал Машу за 4 минуты. За сколько минут догнал Машу Тиша?

Д2.7. Мама положила на стол сливы и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришел Алан, взял треть слив и ушел. Потом пришел Владик, взял треть оставшихся слив и тоже ушел. Потом пришел Дима и взял 4 сливы — треть от тех слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мама?

Д2.8. Для проведения командной игры пригласили всех желающих и заранее объявили, что в каждой команде — от 6 до 8 человек. Когда подсчитали количество пришедших, то выяснилось, что выполнить это условие невозможно, при этом на две команды игроков хватало. Сколько человек пришло на командную игру?

Д2.9. Над озерами летели гуси. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на семи озерах. Сколько было гусей?

Д2.10. Можно ли клетчатый прямоугольник 7×5 разрезать по границам клеток на 8 прямоугольников разной площади?

Д2.11. У Бабы-яги все животные, кроме двух, — коты, все, кроме двух, — совы, все, кроме двух, — крысы, а остальные — тараканы. Сколько тараканов может быть у Бабы-яги?

Д2.12. Команда «Метеор» в третьем матче турнира забросила втрое больше шайб, чем в первом, а во втором и четвертом матчах — в сумме на 8 шайб меньше, чем в первом и третьем вместе взятых. Известно, что в этих четырех матчах «Метеор» забросил не более 11 шайб. Какое наибольшее число из этих матчей он мог выиграть?

Д2.13. Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т. д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

Д2.14. Для школьников и учителей было приготовлено конфет столько же, сколько булочек и пакетов сока вместе. Сначала каждый школьник съел по конфете и выпил по пакету сока, после чего осталось пакетов сока и конфет вместе столько, сколько булочек. Найдется ли пакет сока для заглянувшего к ним завуча?

Д2.15. Подставьте вместо разных букв разные ненулевые цифры, чтобы результат был как можно больше:

$$M+\frac{1}{A+\frac{1}{X}}.$$

Д2.16. Найдутся ли три положительных числа, из которых одно равно произведению двух других, другое — разности двух других, а третье — полусумме двух других?

Д2.17. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков белого и черного цвета. Черные лоскутки между собой не граничат, каждый черный граничит с пятью белыми, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

Д2.18. За одно нажатие можно число на экране калькулятора увеличить на его дробную часть (например, из $\frac{3}{7}$ получить $\frac{6}{7}$, а из 3,8 получить $3{,}8+0{,}8=4{,}6$). Начав с положительного числа, меньшего 1, за три нажатия получили число 3. С какого числа начали?

Д2.19. Род Муромцевых (ныне, увы, прекратившийся) основали трое сыновей Ильи Муромца. Все мужчины в этом роду имели по трое детей, за исключением семерых, не оставивших потомства. Всего в роду были 1994 женщины. Сколько всего человек было в роду Муромцевых? (Роду принадлежали основатели, а также те и только те дети, чей отец принадлежал роду.)

Д2.20. Имеется набор гирь с такими двумя свойствами: 1) в нем можно выбрать пять гирь, попарно различных по весу; 2) для любых двух гирь найдутся две другие гири того же суммарного веса. Какое наименьшее число гирь может быть в этом наборе?

Д2.21. «В этой фразе $\frac{1}{\dots}$ всех цифр — цифры *, доли цифр * и * одинаковы и равны $\frac{1}{\dots}$, а на долю всех остальных цифр приходится $\frac{1}{\dots}$». Вставьте вместо звездочек три разных цифры, а вместо многоточий — три разных числа так, чтобы фраза была верной.

Указания и решения

Д2.1. Пусть получилось N. «Откатаем» все действия в обратном порядке: прибавим 5, поделим на 4, отнимем 3. Тогда получим исходное число: $(N+5):4-3$.

Д2.2. *Ответ*: правда.

Решение. Маша собрала больше всех, значит, больше Сени. Даша собрала не меньше Вени. Значит, Маша и Даша вместе собрали больше Сени с Веней (неравенство строгое, так как оно строгое между Машей и Веней).

Д2.3. *Ответ*: нельзя.

Решение. Предположим противное: так заполнить можно. Подсчитаем сумму всех чисел таблицы, складывая суммы строк. Тогда мы сложим 5 отрицательных чисел, значит, общая сумма тоже отрицательна. Теперь подсчитаем общую сумму, складывая суммы столбцов. Складываем 6 положительных чисел, значит, и общая сумма положительна. Но общая сумма не должна зависеть от способа подсчета и не может быть положительной и отрицательной одновременно. Значит, так таблицу заполнить нельзя.

Д2.4. *Ответ*: 21 коп.

Решение. Пустим процесс задом наперед. Тогда перед мостом лодырь получает 24 копейки, а при переходе половина денег испаряется. После первого перехода у него будет $(0+24):2=12$ коп., после второго — $(12+24):2=18$ коп., после третьего — $(18+24):2=$ $=21$ коп.

Д2.5. *Ответ:* увеличилась.

Решение. У правильной дроби числитель меньше знаменателя, поэтому она меньше 1. Назовем *нехваткой* разницу между нашей дробью и единицей. Нехватка — дробь с таким же знаменателем, а ее числитель равен разности между знаменателем и числителем нашей дроби. При увеличении числителя и знаменателя на 1 разность между ними не изменится. У нехватки новой дроби знаменатель увеличился, а числитель не изменился. Значит, нехватка *уменьшилась*, поэтому наша дробь увеличилась.

Д2.6. *Ответ:* за 12 минут.

Решение. Когда Миша догнал Машу, она была в дороге $12+4=$ $=16$ мин, а Миша только 4 мин. Значит, Миша шел в $\frac{16}{4}=4$ раза быстрее Маши. Тиша же шел в $\frac{4}{2}=2$ раза быстрее Маши. Значит, когда он догнал Машу, он был в пути вдвое меньше Маши. Если Тиша был в пути t минут, то Маша — $12+t$ минут. Приравнивая, получим уравнение $12+t=2t$, откуда $t=12$.

Д2.7. *Ответ:* 27 слив.

Решение. Если 4 сливы — это треть, то всего Дима увидел $3\cdot4=$ $=12$ слив. Эти сливы составили две из трех долей, на которые делили их Владик. Значит, доля Владика была $12:2=6$ слив, а видел он $12+6=18$ слив. Точно так же доля Алана составила $18:2=9$ слив, а мама оставила $18+9=27$ слив.

Д2.8. *Ответ:* 17.

Решение. Две команды содержат от 12 до 16 школьников (при этом все такие числа возможны: $6+6$, $6+7$, $7+7$, $7+8$ и $8+8$), а три команды — не меньше $3\cdot6=18$. Поэтому 17 человек на команды разбить нельзя. Пусть пришло $n\geqslant18$ школьников. Покажем, как можно их разбить на команды нужного размера.

Будем отделять от них команды по 6 человек, пока возможно. Таких команд выйдет не менее трех, и, возможно, останутся не пристроенными не более 5 человек. Их можно по кругу распределять по первым трем командам, при этом в каждую команду добавится не более двух человек. Итак, все школьники пристроены, и все команды — нужного размера.

Комментарий. Нетрудно понять, что мы поделили n на 6 (с остатком): $n = 6q + r$, организовали сначала q команд по 6 человек, затем пристроили r оставшихся школьников.

Д2.9. *Ответ*: 127 гусей.

Решение 1. Запустим процесс задом наперед. Тогда от каждого озера к стае добавлялось сначала полгуся, а затем стая удваивалась. При этом удваивалась и стая без полгуся, и полгуся. Фактически, удваивалась стая, а потом добавлялся целый гусь: так считать удобнее. Пронумеруем озера с конца. После первого озера стало $2 \cdot 0 + 1 = 1$ гусь, после второго $2 \cdot 1 + 1 = 3$ гуся, и так еще 5 раз: $2 \cdot 3 + 1 = 7$, $2 \cdot 7 + 1 = 15$, $2 \cdot 15 + 1 = 31$, $2 \cdot 31 + 1 = 63$, $2 \cdot 63 + 1 = 127$.

Решение 2. Пусть был гусиный косяк, состоящий из нашей стаи серых гусей и еще белого гуся. Тогда полкосяка состоит из половины стаи и половинки белого гуся. Как раз столько и садилось. После 7 озер от косяка остался только один белый гусь. Значит, вначале в косяке было $1 \cdot 2^7 = 128$ гусей, из них в стае — 127.

Д2.10. *Ответ*: нет.

Решение. Допустим, разрезать удалось. Все площади измеряются целым числом клеток. Наименьшая из площадей $s \geqslant 1$. Тогда следующая по величине площадь больше s, то есть не меньше $s + 1 \geqslant 2$. Продолжая такие рассуждения, видим, что следующая площадь не меньше 3, потом не меньше 4 и т. д. Тем самым, сумма восьми площадей не меньше $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 > 35 = 7 \cdot 5$ — противоречие.

Д2.11. *Ответ*: 0 или 2.

Решение. Фраза «Все, кроме двух, коты» означает, что всего животных на 2 больше, чем котов, или что котов на 2 меньше, чем всего животных. То же верно для крыс и сов. Но тогда котов, сов и крыс поровну. Коты и крысы — не совы, поэтому их вместе — не более двух. Значит, их по одному или по 0.

Случай 1. Если их по одному, то сова тоже одна. Всего животных на 2 больше, чем сов, то есть $1 + 2 = 3$. Сов, крыс и котов вместе — трое, значит, тараканов нет.

Случай 2. Если котов и крыс нет, то и сов нет. Всего животных на 2 больше, чем сов, то есть $0+2=2$. Сов, крыс и котов нет, значит, эти двое — тараканы.

Д2.12. *Ответ*: 2 матча.

Решение. В первом и третьем матче «Метеор» забросил в сумме не более 11 шайб. Но эта сумма в 4 раза больше числа шайб первого матча, значит, она делится на 4. Поэтому сумма не больше 8. Но ее можно уменьшить на 8, значит, она и не меньше 8. Итак, сумма равна 8. Но тогда во 2-м и 4-м матчах «Метеор» забросил 0 шайб, значит, он эти матчи не выиграл. А 1-й и 3-й он мог выиграть, например, со счетом $2:0$ и $6:0$ соответственно.

Запомните прием: неравенство для целых чисел можно *усилить*, используя делимость.

Д2.13. *Ответ*: 81 открытка.

Решение. После того как девятому ученику дали одну десятую оставшихся открыток, должно было остаться 0,9 оставшихся открыток. Но осталось ноль. Значит, и оставшихся открыток было 0. Тогда девятый ученик получил $9+0$ открыток. Каждый из учеников тоже получил по 9 открыток, значит, всего было роздана $9\cdot 9=81$ открытка.

Д2.14. *Ответ*: нет.

Решение. Положим конфеты на один стол, а булочки и сок — на другой. Будем все считать в штуках. Вначале штук на обоих столах поровну. Школьники берут по штуке с разных столов, поэтому равенство не нарушается. Значит, в конце конфет не меньше, чем булочек. Но сока и конфет вместе столько, сколько булочек, следовательно конфет не больше, чем булочек. Значит, конфет и булочек поровну. Но тогда сока нет, иначе равенство нарушится.

Д2.15. *Ответ*: максимум $9\frac{8}{9}$ достигается при $M=9$, $A=1$, $X=8$.

Решение. Докажем, что больше $9\frac{8}{9}$ получить нельзя. Знаменатель $A+\frac{1}{X}>A\geqslant 1$, поэтому дробь меньше 1, а все выражение меньше $M+1$. Если $M\leqslant 8$, то все выражение меньше $9<9\frac{8}{9}$. Значит, $M=9$. Если $A\geqslant 2$, то $A+\frac{1}{X}>A\geqslant 2$, тогда дробь меньше $\frac{1}{2}$ и выражение меньше $9\frac{1}{2} < 9\frac{8}{9}$. Значит, $A = 1$. Наконец, если $X < 8$, то $A + \frac{1}{X} > 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ и выражение меньше $9\frac{8}{9}$.

Д2.16. *Ответ*: найдутся. *Пример:* $(4{,}5; 1{,}5; 3)$. Действительно, $4{,}5 = 1{,}5 \cdot 3$; $1{,}5 = 4{,}5 - 3$; $3 = \frac{1}{2}(4{,}5 + 1{,}5)$.

Путь к решению. Расположим числа на числовой оси. Полусумма лежит посередине между двумя другими на расстоянии d от них. Но тогда разность берется не между двумя крайними, значит, она равна d. Среднее и правое числа явно больше d, значит, разности равно самое левое число. Тогда среднее равно $2d$, а правое — $3d$. Но правое число равно произведению двух левых. Итак, левое число d умножили на среднее и получили $3d$. Значит, его умножили на 3, то есть $2d = 3$. Отсюда $d = 1{,}5$.

Д2.17. *Ответ*: 20.

Решение. Пусть есть x белых лоскутов, тогда черных $32 - x$. Посчитаем двумя способами число пар лоскутов разного цвета с общей границей. Каждый белый лоскут входит в 3 таких пары, итого $3x$ пар. Каждый черный входит в 5 пар, итого $5(32 - x)$ пар. Приравнивая, получаем уравнение $3x = 5(32 - x)$, откуда $x = 20$.

Д2.18. *Ответ*: $0{,}875 = \frac{7}{8}$.

Решение. При каждом нажатии прибавляется меньше 1. Значит, последним нажатием число 3 получено из числа $2 + x$, где x — дробная часть. Поскольку $(2 + x) + x = 3$, имеем $x = 0{,}5$, то есть после второго нажатия было число 2,5. После первого нажатия было число, большее $2{,}5 - 1 = 1{,}5$, то есть либо $1 + y$, либо $2 + x$. Из уравнений $(1 + y) + y = 2{,}5$ и $(2 + x) + x = 2{,}5$ находим, что после первого нажатия было либо число 1,75, либо число 2,25. Но 2,25 нельзя получить за один ход из числа, меньшего единицы. Выписывая аналогичные уравнения, видим, что 1,75 получается только из числа 1,375 (которое больше 1) либо из числа 0,875.

Д2.19. *Ответ*: 3000.

Решение. Пусть в роду было m мужчин. Посчитаем число людей в роду двумя способами. С одной стороны, они делятся на мужчин и женщин, то есть их $m + 1994$. С другой стороны, они делятся на сыновей Ильи Муромца и на детей мужчин рода. Отцов в роду было $m - 7$, поэтому детей $3(m - 7)$, то есть всего $3 + 3(m - 7)$. Приравнивая, получим уравнение $3+3(m-7)=m+1994$, откуда $m=1006$. А всего в роду $1006+1994=3000$ человек.

Д2.20. *Ответ*: 13 гирь.

Решение. Оценка. Пусть T — самый большой из весов гирь, V — второй по тяжести вес ($V<T$). Тогда пару гирь весов T и V можно уравновесить только парой гирь тех же весов. Действительно, пара весов $T+T$ тяжелее, а любая другая пара легче, чем $T+V$). Значит, и вес T, и вес V встречаются каждый как минимум по два раза. Но тогда пару $T+T$ можно уравновесить только точно такой же парой. Значит, вес T есть в четырех экземплярах. Аналогично самый легкий вес тоже есть в четырех экземплярах, а второй по «легкости» — в двух. Есть еще средний вес из 5 гирь разного веса. Итого гирь не менее $4+2+1+2+4=13$.

Пример. Гири весов 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5 грамм. Действительно, $1+3=2+2$, $1+4=2+3$, $1+5=3+3=2+4$, $2+5=3+4$, $3+5=4+4$, остальные пары уравновешиваются точно такими же.

Д2.21. *Ответ*: «В этой фразе $\frac{1}{2}$ всех цифр — цифры 1, доли цифр 2 и 5 (варианты: 0 и 2; 0 и 5) одинаковы и равны $\frac{1}{5}$, а на долю всех остальных цифр приходится $\frac{1}{10}$.»

Решение. Если хотя бы одно из вставленных чисел состоит из трех или более цифр, то всего цифр не меньше 100. Тогда в каком-то из вставленных чисел не менее 31 цифры, поэтому всего цифр не менее 10^{30} и т. д. Ясно, что так не бывает. Поэтому все вставленные числа не более чем двузначны.

Пусть во фразе всего n цифр. Ясно, что $n \geqslant 9$. Все числа меньше 100, поэтому $n \leqslant 12$. Все знаменатели — делители числа цифр. Четыре слагаемых вида $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ в сумме не дадут 1, поэтому $n \neq 9$. Цифр 1 не менее 4, их доля не менее $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, поэтому знаменатель первой дроби однозначный, то есть $n<12$. Единственное n с однозначными делителями — это $n=10$. Значит, доля цифр 1 равна $\frac{1}{2}$. Остальные дроби могут быть равны $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$. В знаменателях по разу встретились цифры 0, 2 и 5, любые две можно упомянуть явно, тогда их доля будет $\frac{1}{5}$, а на долю единственной оставшейся цифры придется $\frac{1}{10}$.

При работе с целыми числами и обыкновенными дробями регулярно используются соображения делимости. Чаще всего они помогают сократить перебор и отсеять невозможные случаи. Скажем, проверять все двузначные числа долго, а все двузначные, которые делятся на 37 (или все двузначные делители числа 286), — намного быстрее. Или, исследуя случай двумя способами, мы при первом способе видим, что N делится на 5, а при втором — что не делится. Противоречие позволит отбросить случай как невозможный. Другое возможное противоречие: разные способы дают разные остатки от деления N на 5.

Вне высшей математики делимость и остатки широко применяются в компьютерной математике и приложениях (криптография), где они тесно переплетаются с неравенствами и оценками. Важно, чтобы и учащиеся осознали эту связь и научились применять делимость не только в задачах «про умножение целых чисел». Разобравшись с задачами раздела, даже семи- и восьмиклассники смогут решить пару легких пунктов из задач С6 ЕГЭ в конце этого раздела.

Разложение на множители

Как известно, всякое число единственным образом раскладывается на простые множители, например $2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Группируя по-разному простые множители, можно получить любое другое разложение числа на сомножители, большие 1, например $2100 = (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) = 6 \cdot 5 \cdot 70$. Видим, что каждый простой множитель входит в какой-то из сомиожителей, то есть делит какой-то из сомножителей. Например, как бы мы ни разложили 2100, будет сомножитель, делящийся на 7.

В задачах на делимость ответ часто бывает не единственный. Его можно найти, перебрав разложения на множители (их обычно немного) и отсеяв неподходящие.

3.1. В пакете меньше 111 слив. Их можно разделить поровну между двумя, тремя или пятью детьми, но нельзя разделить поровну между четырьмя. Сколько слив в пакете?

Ответ: 30 или 90.

Решение. По условию число слив делится на 2, на 3 и на 5. Значит, в его разложении на простые есть множители 2, 3 и 5. Перемножив их, получим множитель 30. Число слив делится на 30, значит, оно равно 30, 60 или 90 (следующее число 120 уже больше 111). Но 60 делится на 4, оно не подходит. А 30 и 90 на 4 не делятся. Поэтому ответов два: в пакете может быть 30 или 90 слив.

3.2. Из клетчатого квадрата 12×12 вырезали по сторонам клеток прямоугольник из 70 клеток. Чему равен его периметр, если сторона клетки равна 1?

Решение. Стороны вырезанного прямоугольника целые. Произведение сторон равно площади, то есть числу клеток, то есть 70. Оно делится на простое число 7, значит, и одна из сторон делится на 7. Но ее длина не больше 12, а среди таких чисел на 7 делится только 7. Тогда другая сторона равна $70 : 7 = 10$. Значит, периметр прямоугольника равен $2 \cdot (7 + 10) = 34$.

3.3. На сколько нулей заканчивается произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10\,?$$

Ответ: на 2 нуля.

Решение. Перегруппируем сомножители:

$$(1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 10).$$

Заметим, что левое произведение не оканчивается на 0. Действительно, если бы оно оканчивалось, то делилось бы на 10, а значит, и на 5. Но 5 — число простое, а ни один из сомножителей не делится на 5 — противоречие. А правое произведение равно 100, поэтому общее произведение получается из левого приписыванием двух нулей.

Комментарий. То, что левое произведение не оканчивается на 0, можно доказать и короче: ни один из сомножителей не делится на 5, поэтому произведение не делится на 5 и, по признаку делимости на 5, не оканчивается на 0 (и на 5).

См. также задачи Д1.14, Д3.2, Д3.3, Д3.5, Д3.7, Д3.10, Д3.13, Д3.22, Д5.17, Д6.12, Д6.21в.

Признаки делимости

Признаки делимости на 5, 2, 4, 8, 3, 9 используются также для выяснения делимости на числа, кратные вышеперечисленным. Тут достаточно помнить, что если a и b взаимно просты, то делимость на ab равносильна одновременной делимости на a и на b.

3.4. К числу 77 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 45.

Ответ: 4770 или 8775.

Решение. Число, делящееся на 45, имеет в разложении простые множители $3 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому делится и на 9, и на 5. По признаку делимости на 5 оно оканчивается на 0 или на 5, а его сумма цифр делится на 9 (эти условия необходимы и достаточны). Если приписать в конце цифру 0, то сумма цифр $7+7+0=14$ должна быть «поднята» до 18, то есть спереди надо приписать 4. А если приписать в конце цифру 5, то сумма цифр $7+7+5=19$ должна быть «поднята» до 27, то есть спереди надо приписать 8.

3.5. Напишите наибольшее натуральное число, взаимно простое с 33, у которого все цифры различны.

Ответ: 987 654 320.

Решение. Пример. Рассмотрим число 987 654 320. Его сумма цифр 44, она не делится на 3, поэтому и число не делится на 3. Непосредственно можно убедиться, что оно не делится и на 11.

Оценка. Так как $33 = 11 \cdot 3$, искомое число не должно делиться ни на 3, ни на 11. Есть 10 различных цифр, поэтому число не более чем десятизначно. Но если оно десятизначно, то все цифры встречаются по разу. Однако тогда сумма цифр равна $0+1+2+\ldots+9=45$, то есть делится на 3. Значит, и число делится на 3. Противоречие. Значит, в искомом числе не более 9 цифр.

Докажем, что большего числа, чем 987 654 320, получить нельзя. Действительно, если число больше, то его первая цифра не меньше 9, а значит, равна 9. Аналогично вторая цифра не меньше 8 и не равна 9, значит, равна 8. Продолжая такие же рассуждения, видим, что все цифры числа должны быть равны цифрам в примере и только последняя может отличаться. Но если она отличается, то равна 1 (остальные цифры уже заняты). Однако у числа 987 654 321 сумма цифр делится на 3, значит, и оно делится на 3, то есть не подходит.

Замечание. Вместо деления на 11 можно применить *признак делимости на* 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр делится на 11. У нашего числа знакопеременная сумма цифр $9-8+7-6+5-4+3-2+0=4$ не делится на 11.

3.6. Может ли произведение четырех последовательных целых чисел оканчиваться на 100?

Ответ: нет.

Решение. Числа, кратные 4, идут через 4, поэтому в любой четверке последовательных целых чисел есть одно такое число. Кроме того, в каждой паре последовательных целых чисел есть четное число. Разбивая четверку на две пары, получаем, что в четверке есть число, делящееся на 4, и еще одно число, делящееся на 2. Тогда произведение этих четырех чисел делится на $2\cdot 4=8$. По признаку делимости на 8 число, образованное последними тремя цифрами, тогда тоже должно делиться на 8. Однако 100 на 8 не делится. Противоречие. Значит, произведение на 100 заканчиваться не может.

См. также задачи Д3.1, Д3.15, Д3.21, Д5.15.

Четность. Перебор по четности

Четность числа зависит только от четности последней цифры. Четность суммы, разности и произведения чисел зависит только от четностей слагаемых или сомножителей. Обозначив четное число Ч, а нечетное Н, получим правила действия с четностями как с числами: $Ч+Ч=Н+Н=Ч$, $Ч+Н=Н+Ч=Н$, $Ч\cdot Ч=Ч\cdot Н=$ $=Н\cdot Ч=Ч$, $Н\cdot Н=Н$. Четность разности мы не выписывали, так как она совпадает с четностью суммы. Отметим закон *перестановочности* (математики говорят — *коммутативность*) сложения и умножения. Иногда предпочитают писать 0 вместо Ч и 1 вместо Н. Четность длинной (алгебраической) суммы совпадает с четностью количества нечетных слагаемых.

С помощью четности часто доказывают невозможность чего-либо, подсчитав четность двумя способами и получив разные ответы.

3.7. Числа m и n целые. Какова четность числа $mn(m+n)$?

Ответ: оно четное.

Решение. Переберем все возможные варианты четностей для чисел m и n. Их четыре, но в силу перестановочности достаточно рассмотреть лишь три: 1) $Ч \cdot Ч(Ч+Ч) = Ч \cdot Ч = Ч$; 2) $Ч \cdot Н(Ч+Н) = Ч \cdot Н = Ч$; 3) $Н \cdot Н(Н+Н) = Н \cdot Ч = Ч$. Итак, во всех случаях получаем четное число.

3.8. По кругу стоят 77 корзин. Разность числа яблок в каждой паре соседних корзин — простое число. Найдите наименьшую разность, которая заведомо встречается.

Ответ: 2.

Решение. Как известно, все простые числа нечетны, кроме самого маленького из простых — числа 2. Пойдем вокруг корзин по часовой стрелке и будем выписывать разность со знаком плюс, если в следующей корзине яблок больше, или минус — если меньше. Получим алгебраическую сумму 77 слагаемых. Поскольку мы вернулись к исходной корзине, а в ней число яблок не изменилось, эта сумма равна 0, то есть четна. Предположим, что в сумме нет числа 2. Тогда все слагаемые нечетны и сумма нечетного числа слагаемых должна быть нечетна. Противоречие. Значит, двойка в сумме есть, она и будет наименьшей разностью.

3.9. В клетчатом квадрате, разрезая по границам клеток, прорезали квадратную дырку поменьше. Оставшаяся фигура состоит ровно из 244 единичных клеток. Найдите длины сторон квадрата и дырки.

Ответ: 62 и 60.

Решение. Пусть k — сторона квадрата, d — дырки. Тогда в квадрате k^2 клеток, в дырке d^2, значит, в оставшейся фигуре $k^2 - d^2 = 244$. Разложим левую часть на множители: $(k+d)(k-d)$. Сумма и разность в скобках одинаковой четности, их произведение четно, значит, они четны. С другой стороны, разложение 244 на простые множители — это $2 \cdot 2 \cdot 61$. Тогда ясно, что при разложении на два множителя одинаковой четности двойки входят в каждый из сомножителей, а 61 — в больший сомножитель. Итак, $k - d = 2$, $k + d = 2 \cdot 61 = 122$. Решив эту систему уравнений, найдем $k = 62$, $d = 60$.

См. также задачи 1.12, Д3.16, Д3.18, Д5.20б, Д6.3, Д6.21б.

Десятичное разложение

При работе с цифровой записью числа каждый понимает, что цифры старших разрядов гораздо весомее, чем цифры младших (особенно если число обозначает сумму денег). Более опытные знают, что десятичную запись можно понимать как сумму степеней десятки с цифрами коэффициентами: $2013 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 1$. Переход от цифровой к алгебраической записи позволяет строить математическую модель там, где раньше хватало рутинных навыков (действия «столбиком»). Это позволяет уже семиклассников учить анализировать ситуацию и исследовать ее с помощью уравнений и неравенств. Учить таким навыкам придется все равно: сложные задачи без них не решишь, и вообще без этого математические знания нельзя назвать полноценными.

3.10. Записав два раза подряд одно и то же трехзначное число, получили шестизначное. Докажите, что оно делится на 91.

Решение. Заметим, что если бы мы умножили столбиком наше трехзначное число на 1001, мы получили бы то же самое шестизначное число. Поэтому шестизначное число делится на 1001. А $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 11 \cdot 91$. Поскольку 1001 делится на 91, шестизначное число тоже делится на 91.

3.11. В трех двузначных слагаемых все цифры различны. Какая наибольшая сумма могла получиться?

Ответ: 255.

Решение. Пример. $96 + 85 + 74 = 255$. *Оценка.* Есть три цифры в разряде десятков и три цифры в разряде единиц. При сложении десятки складываются с десятками, а единицы с единицами. Самая большая сумма из трех различных цифр равна $9 + 8 + 7 = 24$. Если сумма в разряде десятков равна 24, то цифры 9,8 и 7 стоят в разряде десятков, поэтому наибольшая сумма в разряде единиц $6 + 5 + 4 = 15$ и общая сумма не превосходит $24 \cdot 10 + 15 = 255$. Если же сумма в разряде десятков меньше 24, то она не больше 23. Тогда общая сумма не больше $23 \cdot 10 + 24 = 254$.

3.12. К натуральному числу X справа приписали три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до X. Найдите X.

Ответ: 1999.

Решение. Новое число можно получить и так: умножить X на 1000 (припишутся три нуля), а затем прибавить некоторое число Y, которое не более чем трехзначно. В результате получим $1000X+Y$. Ясно, что

$$1000X \leqslant 1000X+Y < 1000X+1000 = 1000(X+1).$$

С другой стороны,

$$1000X+Y = 1+2+\ldots+X = \frac{X(X+1)}{2}.$$

Сократив неравенство $1000X \leqslant \frac{X(X+1)}{2}$ на X, получим $1000 \leqslant \frac{X+1}{2}$, откуда $X \geqslant 1999$. Сократив неравенство $\frac{X(X+1)}{2} < 1000(X+1)$ на $X+1$, получим $\frac{X}{2} < 1000$, то есть $X < 2000$. Отсюда ответ.

См. также задачи Д3.17, Д3.19, Д3.26.

Остатки

Если натуральное число n не делится на натуральное число m, то можно поделить с остатком, например $100:7=14$ (ост. 2). Это означает, что $100-2$ делится на 7, и что $100=14\cdot7+2$. В общем виде пишут $n:m=q$ (ост. r) или $n=qm+r$. Здесь q — неполное частное, r — остаток. Принято, что остаток не отрицателен и меньше делителя: $0 \leqslant r < m$.

Некоторые остатки настолько важны, что имеют свое имя. Так, остаток от деления на 10 — это *последняя цифра* числа; остаток от деления на 2 — *четность* числа; остаток от деления числа дней на 7 — *день недели* и т. д. Вообще, остатки широко используются в периодических процессах, в частности при исчислении времени на часах и в календаре.

Некоторые признаки делимости обобщаются до способов вычисления остатков.

Ясно, например, что

1) остаток от деления числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5;

2) остаток от деления числа на 4 равен остатку от деления на 4 числа, образованного двумя его последними цифрами.

Полезно помнить, что у двух чисел одинаковы остатки при делении на m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

3.13. Сейчас июнь. А какой месяц будет через 100 месяцев?

Ответ: октябрь.

Решение. Июнь — 6-й месяц в году. А через 100 месяцев будет $6+100=106$-й месяц с начала года. В году 12 месяцев, целые годы можно отбросить; $106:12=6$ (ост. 10). Значит, будет 10-й месяц с начала года, то есть октябрь.

3.14. На последнюю цифру числа 54321* упала клякса-звездочка. Известно, что число делилось на 17. Восстановите цифру.

Ответ: цифра 8.

Решение. Заменим звездочку на цифру — все равно, что к числу 543 210 прибавим эту цифру. Разделим с остатком: $543\,210:17=$ $=31\,953$ (ост. 9), то есть $543\,210=31\,953\cdot 17+9$. Если к правой части добавить 8, то оба слагаемых разделятся на 17. Значит, $543\,210+8=543\,218$ делится на 17. Замена цифры 8 на другую изменит число меньше чем на 17, поэтому измененное число на 17 не разделится.

3.15. Докажите, что число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении а) на 9; б) на 3.

Решение. Представим число как сумму единиц, десятков, сотен и т. д. (например, $324=(100+100+100)+(10+10)+(1+1+1+1)$. Представим сумму цифр как сумму единиц первого разряда, сумму единиц второго разряда и т. д., например,

$$3+2+4=(1+1+1)+(1+1)+(1+1+1+1).$$

Вычтем из первой суммы вторую почленно:

$$(100-1)+(100-1)+(100-1)+(10-1)+(10-1)+\\ +(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1).$$

Тогда останутся слагаемые 0, 9, 99, 999 и т. д. Каждое слагаемое делится на 9 (и на 3), поэтому и сумма делится на 9 (на 3). Но тогда число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9 (на 3).

См. также задачи Д3.6, Д3.9, Д3.13.

Действия с остатками

При сложении и умножении натуральных чисел последняя цифра числа зависит только от последних цифр слагаемых или сомножителей. Можно заменить все числа на их последние цифры, выполнить действия, а затем посмотреть на последнюю цифру результата. Например, последняя цифра числа $77 \cdot 2013 + 2013^4$ будет такой же, как и у числа $7 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 102$, то есть цифрой 2. Если среди действий есть вычитание, то надо еще следить за знаком результата. А именно, если результаты до и после замены одного знака, то последние цифры совпадут; а если разного знака, то последние цифры дополнят друг друга до 10. Например, $1023 - 555 > 0$, а $3 - 5 = -2 < 0$, поэтому первая разность оканчивается на $10 - 2 = 8$.

При подсчетах, связанных с днями недели, можно отбрасывать периоды, кратные семи дням, то есть брать остатки от деления на 7. Поскольку $364 = 52 \cdot 7$ (52 полные недели в году), за обычный год (365 дней) происходит сдвиг на один день недели, а за високосный год (366 дней, лишний день 29 февраля) — на 2 дня. Високосны года, делящиеся на 4, за исключением некоторых лет, кратных 100. Ближайшие исключения: 1900 в прошлом и 2100 в будущем.

Решение задач на последние цифры и дни недели создает необходимую базу примеров для работы с остатками в общем случае.

3.16. Найдите последнюю цифру числа 432^{432}.

Ответ: 6.

Решение. Поскольку степень — это записанное коротко «длинное» произведение, каждый сомножитель можно заменить на последнюю цифру, то есть заменить на степень 2^{432} — последняя цифра не изменится. Заметим еще, что 432 делится на 4, то есть эту степень можно представить как произведение четвертых степеней двойки. Но тогда каждый сомножитель оканчивается на 6, а произведение любого количества шестерок тоже оканчивается на 6.

Замечание. Грубой ошибкой было бы отбросить все цифры, кроме последней, и в показателе степени. Это дало бы неверный ответ, поскольку 2^2 оканчивается на 4.

3.17. Петя и Вася оба родились в среду, 1 марта, но в разные годы. Какая наименьшая разница в возрасте может у них быть?

Ответ: 5 лет.

Решение. Оценка. Поскольку каждый год день недели 1 марта сдвигается на 1 или 2 в одну и ту же сторону, снова стать средой он может не раньше, чем пройдет полный круг, то есть сдвинется на 7 дней. Сдвиг за несколько лет равен числу лет + число високосных лет (точнее, число високосных дней, вклинившихся между датами). За 4 года (или меньше) случится максимум один високосный день, поэтому сдвиг не более $4+1=5$ дней.

Пример. 5 лет возможно: например, Петя родился в 1995 году, а Вася — в 2000 году.

3.18. Пушкин родился 6 июня 1799 года (по новому стилю). Какой это день недели (учтите, что 1800 и 1900 годы не были високосными)?

Ответ: четверг.

Решение. 6 июня 2012 года — среда. Пушкину исполнилось бы 213 лет. Посмотрим сдвиг за эти годы. В 1800-е годы было 24 високосных дня (25 лет, кратных 4, но 1800 надо исключить), в 1900-е — тоже 24, а в 2000-е — 4 дня (2000, 2004, 2008 и 2012 — тут важно, что 29 февраля раньше, чем 6 июня). Итого сдвиг равен $213+24+24+$ $+4=265$ дней. Разделив 265 на 7, получим 37 и 6 в остатке. Значит, нам надо сдвинуться на 6 дней назад от среды. Но 6 дней назад — это все равно, что 1 день вперед: и так, и этак получается четверг.

См. также задачи Д3.8, Д3.11.

НОД и НОК

Напомним, что НОД двух или нескольких целых чисел — это *наибольший общий делитель*, то есть наибольшее число, которое делит каждое из данных целых. НОК — это *наименьшее общее кратное*, то есть наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных целых чисел. Если НОД чисел равен 1, то числа называются *взаимно простыми*. Дроби сокращают на НОД числителя и знаменателя. При сложении дробей знаменатель суммы равен НОК знаменателей слагаемых.

НОД и НОК пронизывают задачи на делимость. Кроме того, их нахождение само по себе является *задачей на максимум и минимум*. Даже простейшие задачи про НОД и НОК заставляют школьников думать самостоятельно.

3.19. Три числа взаимно просты. Обязательно ли какие-то два из них тоже взаимно просты?

Ответ: не обязательно.

Решение. $\text{НОД}(6, 10, 15) = 1$, однако $\text{НОД}(6, 10) = 2$, $\text{НОД}(6, 15) = 3$, $\text{НОД}(10, 15) = 5$.

3.20. Может ли сумма двух натуральных чисел равняться их НОК?

Ответ: нет.

Решение. Пусть даны числа a и b. Разберем два случая.

Случай 1: $a = b$. Тогда $a + a = 2a > a = \text{НОК}(a, a)$.

Случай 2: $a \neq b$. Без ограничения общности считаем, что $a < b$. Тогда $b < a + b < 2b$. Но между b и $2b$ нет чисел, кратных b, поэтому $a + b \neq \text{НОК}(a, b)$.

3.21. Сумма нескольких натуральных чисел равна 1000, все цифры в их записи различны. Какие значения может принимать наибольший общий делитель этих чисел?

Ответ: 1, 2, 4 или 8.

Решение. Так как общий делитель слагаемых является делителем суммы, НОД данных чисел должен быть делителем числа $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Допустим, НОД делится на 5. Тогда и все числа делятся на 5, то есть оканчиваются либо на 0, либо на 5. Если чисел не меньше трех, то по принципу Дирихле среди них найдутся два числа, оканчивающиеся на одинаковую цифру. Если же чисел ровно два, то их сумма оканчивается на 0, только когда они оба оканчиваются на 0 либо оба на 5. Во всех случаях какая-то цифра повторяется. Противоречие доказывает, что НОД на 5 не делится. Но тогда НОД является делителем числа $2^3 = 8$. А для всех делителей числа 8 строятся примеры с разными цифрами: $\text{НОД}(104, 896) = 8$; $\text{НОД}(124, 876) = 4$; $\text{НОД}(126, 874) = 2$; $\text{НОД}(103, 897) = 1$.

См. также задачи Д3.4, Д3.10, Д3.12, Д3.18, Д6.2, Д6.6.

Делимость и алгебра

Если неизвестные принимают целые значения, то полезно выписывать такие выражения, которые тоже всегда целые. Подсчитывая двумя способами и приравнивая выражение к числу или к другому выражению, стоит последить за делимостью. Для этого полезно выражения раскладывать на множители. Если, скажем, правая часть делится на какое-то простое число, то и какой-то из сомножителей левой части делится на это простое число. Полученную делимость можно использовать для получения противоречия, сокращения перебора или для неравенства «делимое не меньше делителя».

3.22. Охотник неделю охотился на уток и каждый день начиная со второго приносил вдвое больше уток, чем в предыдущий день. Друзьям он сказал, что за вторник, среду и четверг он добыл ровно 100 уток. Могут ли его слова быть правдой?

Ответ: нет.

Решение. Пусть во вторник он добыл u уток, тогда он добыл $2u$ уток в среду и $4u$ — в четверг. Всего за эти дни он добыл $u + 2u + 4u = 7u$ уток. Однако если $7u = 100$, то $u = \frac{100}{7}$ — число не целое (100 на 7 не делится). Значит, охотник сказал неправду.

3.23. В вершинах квадрата записали 4 натуральных числа. Затем на каждой стороне записали произведение чисел в ее концах. Сумма чисел на сторонах равна 77. Чему равна сумма чисел в вершинах?

Ответ: 18.

Решение. Пусть в вершинах записаны по кругу числа a, b, c, d. Тогда на сторонах записаны ab, bc, cd, ad. Известио, что $ab + bc + cd + ad = 77$. Разложим левую часть на множители: $ab + bc + cd + ad = b(a+c) + (c+a)d = (a+c)(b+d)$. Ясно, что значения выражений в скобках натуральны и не меньше 2. Но $77 = 7 \cdot 11$, и это единственное разложение правой части на натуральные множители, большие 1. Значит, одна из скобок равна 7, другая 11, поэтому и сумма в вершинах $a + b + c + d = (a+c) + (b+d) = 7 + 11 = 18$.

3.24. Театр в маленьком городке насчитывал сто мест. В день премьеры спектакля все билеты были проданы на общую сумму в 10 тысяч рублей. Билеты для мужчин стоили 500 рублей, для женщин — 200 рублей, а для детей – 10 рублей. Сколько мужчин, женщин и детей было на премьере?

Ответ: 11 мужчин, 19 женщин и 70 детей.

Решение. Взрослый платит за билет не менее 200 рублей, значит, их было не более 50. Поэтому дети были, и взрослым продали билетов меньше чем на 10 000 руб, то есть взрослых меньше 50. Общая сумма и заплаченное взрослыми кратны 100 руб, значит, заплаченное за детей тоже кратно 100, откуда число детей кратно 10. Заметим, что все зрители не могут быть детьми. Пусть было m мужчин, z женщин и $10d$ детей, где d от 6 до 9. Тогда $m+z+10d=100$ и $500m+200z+100d=10\,000$, или, что равносильно,

$$2m+2z+20d=200, \quad 5m+2z+d=100.$$

Вычтя из второго равенства первое, получим $3m-19d=-100$, или $3m-18d+99=d-1$. Левая часть кратна 3 (все слагаемые делятся на 3), поэтому правая тоже, то есть $d-1$ делится на 3. Значит, подходит только $d=7$, откуда $m=11$, $z=100-11-7\cdot10=19$.

См. также задачи 3.12, Д3.19, Д3.20, Д3.23, Д3.24а, Д3.25а, Д4.18, Д4.19, Д5.16, Д5.17, Д5.18.

Дополнительные задачи

Д3.1. Найдите самое большое трехзначное число, взаимно простое с 300.

Д3.2. Произведение трех различных натуральных чисел равно 91. Чему равна их сумма?

Д3.3. Сколько есть трехзначных чисел, у которых произведение цифр равно 44?

Д3.4. Натуральные числа a и b друг на друга не делятся, при этом их НОД$=50$, а НОК$=1000$. Найдите эти числа.

Д3.5. На клетчатой бумаге сторона клетки равна 0,5 см. По границам клеток вырезали прямоугольник площадью 77 клеток. Чему может быть равен его периметр?

Д3.6. Дождь над Сочи начался в полночь и лил ровно 10 000 минут. Могло ли случиться, что сразу после этого выглянуло солнце?

Д3.7. На третью цифру числа 98*987 упала клякса-звездочка. Известно, что число делилось на 13. Восстановите цифру.

Д3.8. Найдите две последние цифры числа 1999^{2000}.

Д3.9. Винни-Пуху подарили 40 конфет. Он съел, сколько влезло, а остальными хотел угостить поровну трех гостей. Но тут пришел четвертый гость. Пришлось хозяину съесть еще 3 конфеты, чтобы число оставшихся делилось на 4. Когда пришел пятый гость, пришлось съесть еще 4 конфеты, чтобы число оставшихся делилось на 5. И тут пришел шестой гость. Сколько конфет придется съесть на этот раз, чтобы оставшиеся поделить поровну на шестерых?

Д3.10. Имеется много одинаковых прямоугольных картонок размером $a \times b$ см, где a и b — целые числа, причем a меньше b. Известно, что из таких картонок можно сложить и прямоугольник 49×51 см, и прямоугольник 99×101 см. Можно ли по этим данным однозначно определить a и b?

Д3.11. 9 июля 1999 года в летней школе объявили: «До 200-летия завуча осталось 60 000 дней». Определите дату рождения завуча.

Д3.12. Петя задумал однозначное число. Вася может назвать свое число и спросить, чему равен наибольший общий делитель двух этих чисел. Какое наименьшее число должен он назвать, чтобы по ответу наверняка узнать Петино число?

Д3.13. Сумма трех различных положительных нечетных чисел равна 89. Известно, что в каждой паре этих чисел одно из них делится на другое. Найдите эти числа.

Д3.14. Докажите, что ровно через 28 лет будет тот же день недели.

Д3.15. Волшебник Мерлин пригрозил заменить в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ буквы на цифры (одинаковые буквы на одинаковые цифры, разные — на разные), причем если число окажется простым, случится настоящее землетрясение. Стоит ли опасаться?

Д3.16. У Сени есть пять альбомов с фотографиями. Как-то, рассматривая фотографии, он заметил, что суммарное число фотографий в любых двух альбомах принимает только три значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом альбоме?

Д3.17. Назовем автобусный билет с шестизначным номером счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

Д3.18. Даны две обыкновенные несократимые дроби. У первой сумма числителя и знаменателя равна 222, у второй такая сумма равна 100. Может ли сумма этих двух дробей быть равна $\frac{17}{20}$?

Д3.19. Последнюю цифру шестизначного числа перенесли на первое место, в результате число увеличилось ровно в 5 раз. Найдите исходное число.

Д3.20. Даны три попарно различных целых числа. Одно из них равно сумме двух остальных, а другое — произведению двух остальных. Найдите эти числа?

Д3.21. Докажите, что среди любых 18 подряд идущих трехзначных чисел найдется число, делящееся на свою сумму цифр.

Д3.22. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

Д3.23. Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 2013 на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась произведению чисел в другой группе?

Д3.24. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

Д3.25. Все члены конечной последовательности — натуральные числа. Каждый член начиная со второго либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трех членов?

Д3.26. а) Чему равно число способов записать число 1595 в виде $1000a + 100b + 10c + d$, где числа a, b, c, d — целые неотрицательные и все меньше 100?

б) Существуют ли 10 таких различных чисел N, что их можно представить ровно 160 способами в указанном п. а) виде?

в) Сколько существует таких чисел N, что их можно представить ровно 160 способами в указанном п. а) виде?

Решения и указания

Д3.1. *Ответ*: 997.

Решение. Простые делители числа 300 — только 2, 3 и 5. Нам надо выбрать наибольшее трехзначное число, которое ни на один из них не делится. Начнем с самых больших трехзначных чисел: 999 делится на 3, так как сумма цифр делится на 3; 998 делится на 2, так как последняя цифра делится на 2. А вот 997 не делится ни на 2 (последняя цифра нечетна), ни на 3 ($9+9+7$ не делится на 3), ни на 5 (последняя цифра не делится на 5). Значит, 997 подходит.

Д3.2. *Ответ*: 21

Решение. Разложим 91 на простые множители: $91 = 7 \cdot 13$. При разложении на три разных множителя два из них больше 1. Значит, это 7 и 13, а третий множитель равен 1. Их сумма равна $1+7+13=$ $=21$.

Д3.3. *Ответ*: ни одного.

Решение. Предположим, что такое число есть. Тогда 44 равно произведению его цифр, причем все эти цифры не равны 0. Но 44 делится на простое число 11. Значит, есть сомножитель, который делится на 11. Но никакая ненулевая цифра на 11 не делится. Противоречие. Значит, таких чисел нет.

Д3.4. *Ответ*: 200 и 250.

Решение. Оба числа делятся на НОД, то есть на 50. Но никакое из них не равно 50, так как иначе другое делилось бы на него. По тем же причинам оба числа — делители 1000, меньшие 1000. Обоим условиям удовлетворяют только 100, 200, 250 и 500. Все, кроме 250, делятся на 100, но НОД$\neq 100$. Значит, среди чисел a и b есть 250. Тогда другое число равно 200, иначе НОК$\neq 1000$.

Д3.5. *Ответ*: 18 см или 78 см.

Решение. Измерим стороны прямоугольника стороной клетки. Пусть одна сторона длины m, а другая — длины n. Тогда $mn = 77$.

Из разложения $77 = 7 \cdot 11$ на простые множители можно получить два разложения на натуральные множители: $77 = 7 \times 11 = 1 \times 77$. В первом случае периметр равен $2(7 + 11) = 36$ сторон клеток, или $36 \cdot 0{,}5 = 18$ см, во втором — $2(1 + 77) \cdot 0{,}5 = 78$ см.

Д3.6. *Ответ*: нет.

Решение. В сутках 24 часа по 60 минут, то есть $60 \cdot 24 = 1440$ минут. Поделим с остатком: $10000 : 1440 = 6$ (ост. 1360). Значит, дождь лил 6 полных суток и еще 1360 мин после полуночи. Еще раз делим с остатком: $1360 : 60 = 22$ (ост. 40). Значит, дождь закончился в 22.40. В южных широтах даже летом солнце в это время уже зашло...

Д3.7. *Ответ*: 987 987.

Решение. Заметим, что $987\,987 = 987 \cdot 1001 = 987 \cdot 91 \cdot 13$ делится на 13. Если заменить третью цифру на другую, то к числу добавится или убавится целое число тысяч, но не более чем 7000. Допустим, что новое число тоже делится на 13. Но тогда и добавка делится на 13. Однако никакая из возможных добавок на 13 не делится. Скажем, $6000 = 6 \cdot 1000$, при этом ни 1000, ни однозначное число 6 не делятся на простое число 13. Противоречие. Значит, других вариантов восстановления цифры нет.

Комментарий. В занимательных задачах нередко возникает разложение $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Его полезно помнить.

Д3.8. *Ответ*: 01.

Решение. Ясно, что при умножении столбиком две последние цифры произведения зависят только от двух последних цифр сомножителей. Поэтому они будут такими же, как у числа 99^{2000}. Расписав степень как произведение и сгруппировав сомножители по два, получим $99^{2000} = (99^2)^{1000} = 9801^{1000}$. А при умножении чисел, оканчивающихся на 01, произведение тоже оканчивается на 01.

Комментарий. Решение написано для семиклассников, в нем сознательно не использовались свойства степеней.

Д3.9. *Ответ*: 2 конфеты.

Решение. Пусть шестой гость пришел, когда осталось x конфет, тогда пятый — когда осталось $x + 4$ конфеты. Поскольку по условию $x + 4$ делится на 4, x тоже делится на 4. Но еще по условию x делится на 5. Так как 4 и 5 взаимно просты, x делится и на $4 \cdot 5 = 20$. Так как $x < 40$ (часть конфет была уже съедена), получаем, что $x = 20$. Поделив 20 на 6, получим в остатке 2 конфеты, которые Винни придется съесть.

Для придир. Осталось проверить, что условия задачи непротиворечивы. Действительно, для трех гостей оставалось $20 + 4 + 3 = 27$ конфет, что кратно 3.

Д3.10. *Ответ*: да, $a = 1$, $b = 3$.

Краткое решение. Наибольший общий делитель площадей двух прямоугольников $\text{НОД}(49 \cdot 51, 99 \cdot 101) = 3$. А он делится на площадь картонки. Поэтому $a = 1$, $b = 3$.

Д3.11. *Ответ*: 16 октября 1963 года.

Указание. Если две даты отличаются ровно на 4 года, между ними проходит ровно $4 \cdot 365 + 1 = 1461$ день.

Д3.12. *Ответ*: $\text{НОК}(1, 2, 3, \ldots, 9) = 2520$.

Решение. Обозначим Васино число v. Чтобы угадывать наверняка, все НОДы числа v с однозначными числами должны быть различны. С другой стороны, НОД с однозначным числом не больше этого числа. $\text{НОД}(v, 1) = 1$; $\text{НОД}(v, 2) \leqslant 2$ и не равен 1, значит, $\text{НОД}(v, 2) = 2$. Аналогично $\text{НОД}(v, 3) = 3$, ..., $\text{НОД}(v, 9) = 9$. Но $\text{НОД}(v, k) = k$, только если v делится на k. Итак, v делится на каждое из однозначных чисел. Наименьшее такое число — это $\text{НОК}(1, 2, 3, \ldots, 9) = 2520$. Число 2520 подходит: оно делится на каждое из однозначных, поэтому в ответ Петя обязательно назовет свое число.

Д3.13. *Ответ*: 1, 11, 77.

Решение. Все числа, а значит, и их сумма 89, делятся на наименьшее из них. Но 89 — простое число, поэтому наименьшее из этих трех чисел равно 1. Тогда сумма пары оставшихся чисел равна $88 = 8 \cdot 11$. Эта сумма делится на наименьшее число пары. Это число нечетно и не равно 1, значит, равно 11 (других нечетных делителей у числа 88 нет). Третье число равно $88 - 11 = 77$.

Д3.14. *Решение.* 29 февраля случается 1 раз в 4 года. Значит, за 28 лет случится ровно 7 високосных дней и $28 \cdot 365$ обычных дней. И то, и другое делится на 7. Значит, пройдет целое число недель, поэтому день недели не изменится.

Д3.15. *Ответ*: нет.

Решение. В слове встретились 10 разных букв, из них Е встретилась 4 раза, а остальные по разу. Взяв каждую букву по разу и заменив их на цифры, получим сумму цифр $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. К ней надо добавить утроенную сумму цифры, которая заменит букву Е. Оба слагаемых делятся на 3, значит, и сумма цифр полученного числа делится на 3. Но тогда по признаку делимости и число делится на 3. А так как оно явно не равно 3, оно не простое!

Д3.16. *Ответ*: 31, 44, 44, 44, 57.

Решение. Для каждого альбома выпишем число фотографий в нем. Среди этих чисел есть одинаковые (иначе, добавляя одно к остальным, получили бы четыре разные суммы). Сумма двух одинаковых чисел — число четное, то есть может быть равно только 88. Но тогда все одинаковые числа равны 44. Теперь ясно, что нет других четных чисел, кроме 44 (иначе вместе с 44 не получим 88). Нечетная сумма получается сложением нечетного числа с четным числом 44. У нас есть две нечетные суммы 75 и 101, поэтому есть и нечетные числа $75-44=31$ и $101-44=57$. Каждое встречается ровно по разу, так как повторяться могут только четные числа. Отсюда ответ.

Д3.17. *Ответ*: могут.

Решение. Например, 159 999 и 160 000: $1+5+9+9+9+9=42$, $1+6+0+0+0+0=7$.

Путь к решению. Обычно, увеличив число на 1, мы увеличиваем его последнюю цифру на 1, поэтому сумма увеличится на 1. Это нам не подходит: делящиеся на 7 числа не могут отличаться на 1.

При переходе через десяток на 1 вырастает предпоследняя цифра, а последняя цифра из 9 превращается в 0. Сумма цифр уменьшается на 8 и теперь на 7 не делится. Опять не подходит.

Если число оканчивалось на несколько девяток, то все они заменяются на 0, а предыдущая цифра увеличивается на 1. В целом сумма цифр уменьшается на $9k-1$, где k — число девяток. Нам надо, чтобы $9k-1$ делилось на 7. Это возможно при $k=4$. Осталось подобрать цифры так, чтобы число оканчивалось на 4 нуля, а сумма цифр делилась на 7. Подходит 160 000.

Д3.18. *Ответ*: не может.

Решение. Так как сумма числителя и знаменателя четна, они одинаковой четности. Но оба четными быть не могут, иначе дробь сократима. Значит, знаменатели наших дробей нечетны. За общий знаменатель возьмем НОК этих знаменателей, он тоже будет нечетный. Если дробь после сложения числителей придется сократить, знаменатель все равно останется нечетным. Поэтому знаменатель не станет равен 20, и, в частности, сумма не может стать равной $\frac{17}{20}$.

Д3.19. *Ответ*: 142 857.

Решение. Обозначим через x последнюю цифру, а через Y — число, образованное первыми пятью цифрами. Тогда $10Y+x$ — исходное число, $100000x+Y$ — число после переноса цифры, и выполнено соотношение $100000x+Y=5(10Y+x)$, или, что равносильно, $99995x=49Y \iff 14285x=7Y$. Левая часть делится на 7, но 14 285 на 7 не делится, поэтому x делится на 7. Но x — ненулевая цифра, значит, $x=7$. Тогда $Y=14285$.

Д3.20. *Ответ*: 2, −2, −4.

Решение. Пусть $a=bc$, $b=a+c$. Ясно, что все числа ненулевые, иначе среди них будут равные. Так как a делится на c, число $b=a+c$ тоже делится на c. Так как a делится на b, число $c=a-b$ тоже делится на b. Поскольку b и c делятся друг на друга, но не равны, они отличаются только знаком: $c=-b$. Поэтому $a=b-c=2b$ и $c=\frac{a}{b}=2$. Тогда $b=-2$, $a=-4$.

Д3.21. *Решение.* Среди 18 подряд идущих чисел найдется число N, делящееся на 18. Действительно, найдем остаток от деления самого первого числа на 18. Сдвигаясь к следующему, будем увеличивать остаток, пока он не дорастет до 18 (чисел нам хватит). Это и будет искомое число N.

Число N делится на 18, значит, делится на 9 и на 2. Тогда по признакам делимости его сумма цифр делится на 9. Если N трехзначно, его сумма цифр меньше 27 (999 не подходит как нечетное). Значит, сумма цифр числа N равна 9 или 18, и N на нее делится.

Замечание. Фактически в первом абзаце доказано более общее утверждение: среди n последовательных чисел есть число, делящееся на n.

Д3.22. *Ответ*: 14×16.

Решение. Площадь отложенного прямоугольника равна $18 \cdot 18 - 10 \times 10 = 224$. Разложим ее на простые множители: $224 = 2^5 \cdot 7$. Значит, длина одной из сторон отложенного прямоугольника кратна 7. Она не больше 18, поэтому равна 7 или 14. Но если она равна 7, то другая сторона равна 32, что больше 18. Противоречие. Поэтому приведенный ответ единственный.

Д3.23. *Ответ*: можно.

Решение. Например, в первую группу поместим числа 1, 1006 и 2012, а в другую — все остальные. Достаточно проверить, что сумма чисел первой группы, сложенная с их произведением, даст сумму всех чисел от 1 до 2013. Сумма всех чисел — это сумма арифметической прогрессии, она равна

$$\frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2013 \cdot 1007.$$

А сумма группы плюс ее произведение равна

$$1 + 1006 + 2012 + 1 \cdot 1006 \cdot 2012 = (1 + 1006)(1 + 2012) = 1007 \cdot 2013.$$

Д3.24. *Ответ*: а) 44 числа; б) отрицательных больше.

Решение. Пусть среди написанных чисел p положительных, n отрицательных и z нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое. Значит, сумма положительных равна $4p$, сумма отрицательных равна $-8n$, а сумма всех равна $-3(p + n + z)$. Но общую сумму можно посчитать и вторым способом, сложив суммы положительных, отрицательных и нулевых. Получим уравнение $-3(p + n + z) = 4p - 8n + 0$.

а) В правой части каждое слагаемое делится на 4, поэтому и левая часть делится на 4. Но 3 — нечетно, поэтому на 4 делится $p + n + z$ — количество целых чисел. Среди чисел, больших 40, но меньших 48, на 4 делится только 44. Итак, написано 44 числа.

б) Равенство $-3(p + n + z) = 4p - 8n$ можно переписать как $5n = 7p + 3z$. Отсюда $5n \geqslant 7p > 5p$. Поэтому $n > p$, то есть отрицательных чисел больше, чем положительных.

Д3.25. *Ответ*: а) нет; б) да.

Решение. а) Если последовательность состоит из двух членов a и $13a$ (в произвольном порядке), то $a+13a=3345$. Уравнение $14a=$ $=3345$ не имеет решений в натуральных числах, так как 3345 на 14 не делится. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трех членов: 223, 2899, 223. Действительно, $223\cdot 13=2899$.

Путь к решению. Пусть самый маленький член равен a. Тогда его сосед равен $13a$. Третий член может быть равен a (порядок a, $13a$, a), либо $13a$ (порядок $13a$, a, $13a$), либо 13^2a (порядок a, $13a$, 13^2a или обратный). Соответственно, суммы равны $15a$, $27a$ либо $183a$. Приравнивая суммы к 3345, получаем, что целочисленное решение есть только у уравнения $15a=3345$, оно и дает наш единственный пример.

Д3.26. *Ответ*: а) 160; б) да; в) 10.

Решение. а) Каждое из чисел a, b, c, d однозначно или двузначно, поэтому его можно единственным образом представить в виде $10x+y$, где x и y — цифры. Представим так a, b, c, d: $a=10a'+a''$, $b=10b'+b''$, $c=10c'+c''$, $d=10d'+d''$. Тогда $1000a+100b+10c+$ $+d=10(1000a'+100b'+10c'+d')+(1000a''+100b''+10c''+d'')=$ $=10P+Q$. Как видим, число P в первой скобке записывается цифрами $a'b'c'd'$, а число Q во второй — цифрами $a''b''c''d''$. Поскольку $10P\leqslant 1595$, имеем $P\leqslant 159$. При любом значении P от 0 до 159 цифры a', b', c', d' определяются однозначно. Если известно P, то известно и $Q=1595-10P$, и его цифры a'', b'', c'', d'' тоже определены однозначно. Например, при $P=134$ имеем $a'=0$, $b'=1$, $c'=3$, $d'=4$, $Q=1595-10\cdot 134=261$, откуда $a''=0$, $b''=2$, $c''=6$, $d''=1$ и $a=00=0$, $b=12$, $c=36$, $d=41$. Тем самым, имеем 160 вариантов для всех восьми цифр, а, значит, и для чисел a, b, c, d.

б, в) В предыдущем пункте показано, что число вариантов равно числу значений числа P, а оно принимает все значения от 0 до $\left[\frac{N}{10}\right]$ (здесь квадратные скобки означают целую часть числа). Числа N, для которых $\left[\frac{N}{10}\right]=159$, дают 160 вариантов. Таких чисел ровно 10: 1590, 1591, ..., 1599.

4. ДРОБИ, ДОЛИ, СРЕДНИЕ

Дроби сложнее целых чисел прежде всего из-за неоднозначности записи. Важно научить школьников различать запись дроби и ее значение.

Идущая от целых чисел интуиция не всегда применима при работе с дробями. Чтобы выработать новую интуицию, полезно научиться связывать дроби и целые числа. Кроме того, помогает восприятие значения дроби как доли, то есть части некоторого целого.

Надо понимать, что доли, средние арифметические, процентные содержания и даже температура — величины относительные. Они получаются делением некоторой суммарной величины на количество. В задачах на относительные величины эти суммарные величины («числители» и «знаменатели») всегда присутствует (иногда неявно). И если относительные величины так запросто не сложишь, то, перейдя за счет умножения к суммарным величинам, можно будет их складывать и вычитать «без риска», а уж потом делением получить итоговые относительные величины.

Сокращать или нет? Запись и значение дроби

У целых чисел запись однозначна, а у дробей — нет. Многих учеников это сбивает с толку, особенно поначалу. Требуется время, чтобы привыкнуть, что $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{6}$, $1\frac{1}{2}$, 1,5 и 150% — это одно и то же. Чтобы уменьшить неоднозначность, школьные учебники рекомендуют дроби сокращать. Некоторые учителя идут дальше, практически объявляя несокращенные дроби «незаконными». В результате школьники начинают ошибочно считать, что и в алгебре дроби уже сокращены, и при равенстве дробей приравнивают числитель к числителю, а знаменатель к знаменателю.

Лучше сразу приучить учеников, что у дроби есть *запись* и *значение*, и это не одно и то же. Запись мы можем выбирать, как нам удобно (переходить от десятичной дроби к обыкновенной, от смешанной дроби — к неправильной, сокращать или домножать числитель и знаменатель на одно чнсло), а значение при этом не меняется. Привычка к неоднозначности записи при неизменности сути поможет впоследствии преобразовывать уравнения в равносильные, выбирать удобную и целесообразную запись многочленов и функций и т. п. Выработать привычку различать запись и значение можно на задачах, где идет работа именно с записью дроби.

4.1. Черепаха проползает вокруг клумбы по часовой стрелке за полтора часа, а против часовой — за 90 минут? Объясните разницу.

Решение. Никакой разницы нет, различается только запись времени. По значению 90 мин и 1,5 часа — это одно и то же время, только в разных единицах измерения.

4.2. У двух правильных дробей числители больше 1000. У первой знаменатель на 3 больше числителя, а у второй — на 5. Могут ли дроби быть равны?

Ответ: могут.

Решение. Например, $\frac{3000}{3003}$ и $\frac{5000}{5005}$. Обе дроби после сокращения равны $\frac{1000}{1001}$.

Путь к решению. Достаточно взять дробь с любым числителем, большим 333, и знаменателем на 1 больше числителя. Домножив числитель и знаменатель на 3, получим разницу 3 между ними, а домножив на 5 — разницу 5.

4.3. Произведение десяти обыкновенных дробей равно 1. В каждой из дробей либо числитель, либо знаменатель увеличили на 1 так, что произведение не изменилось. Какое наименьшее количество числителей могло быть увеличено?

Ответ: один числитель.

Решение. Оценка. Совсем не изменять числители невозможно, так как, увеличивая только знаменатели, мы обязательно уменьшим значение произведения.

Пример. Рассмотрим произведение

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{17}{9}=1.$$

Увеличим числитель первой дроби и знаменатели остальных дробей на 1. Получим

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{11}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{14}{16}\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{16}{18}\cdot\frac{17}{10}=1.$$

Путь к решению. Покажем, каким образом можно построить такой пример. Так как произведение дробей равно 1, произведение числителей дробей равно произведению их знаменателей. Увеличение сомножителя x в одной части этого равенства на 1 приводит к умножению произведения на $\frac{x+1}{x}$. Значит, добавление по 1 к девяти сомножителям в другой части равенства должно привести к такому же результату.

Для простоты возьмем $x = 1$, тогда требуется подобрать девять натуральных чисел так, чтобы после увеличения каждого из них на 1 их произведение бы увеличилось вдвое. Для этого достаточно взять числа от 9 до 17. После увеличения получаются числа от 10 до 18, то есть почти все сомножители не изменятся, только 9 заменится на 18. В качестве знаменателя дроби с числителем 1 можно взять любое натуральное $n > 1$, тогда числитель одной из дробей должен быть равен $9n$. В нашем случае $n = 3$. Существуют и другие примеры.

Пересчет в целые

Нередко действия с обыкновенными дробями можно заменить на действия с целыми числами за счет выбора другой, более подходящей единицы измерения. А на целых числах интуиция работает лучше и ошибок вычисления меньше.

4.4. Малыш может съесть торт за 6 минут, а Карлсон — за 3. За сколько минут они съедят торт вместе?

Ответ: за 2 минуты.

Решение. Разделим торт на 6 равных кусков. Тогда Малыш съедает 1 кусок в минуту, а Карлсон — два. Вместе они съедают 3 куска в минуту, поэтому 6 кусков съедят за 2 минуты.

4.5. В стране имеют хождение монеты в 1 динар, а также в $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ динара. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него был 1 динар. Мог ли гость прожить в гостинице 10 дней?

Ответ: мог.

Решение. Пусть в динаре 12 дирхемов. Тогда $\frac{1}{4}$ динара = 3 дирхема, $\frac{1}{6}$ динара = 2 дирхема. Этими монетами можно набрать любое целое число дирхемов начиная с 2: четное — двойками, нечетное — одной тройкой, остальные двойки. Гость мог платить 10 дней по одному дирхему, отдавая все, что у него есть, и получая сдачи на 1 дирхем меньше. В конце у него останется 2 дирхема.

4.6. Приведите пример 5 различных обыкновенных дробей с числителем 1, чтобы сумма двух из них была равна сумме остальных трех.

Ответ: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$.

Решение. Если такие дроби нашлись, приведем их к общему знаменателю. Тогда сумма двух числителей будет равна сумме трех других. Но пример, где сумма двух натуральных чисел равна сумме трех других и все 5 чисел различны, придумать нетрудно: $2+6=$ $=1+3+4$. Осталось подобрать общий знаменатель так, чтобы после сокращения все числители были равны 1. Подойдет наименьшее общее кратное чисел 1, 2, 3, 4, 6, то есть 12. Итак, у нас есть равенство

$$\frac{2}{12}+\frac{6}{12}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12},$$

или, после сокращения,

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}.$$

См. также задачи Д4.4, Д4.12, Д4.17.

Доля целого

При решении задач с практическим содержанием лучше воспринимать дробь как *долю*, то есть отношение части к целому. Важно только помнить, что для разных дробей целое может быть свое. Полезно ввести единицу измерения, в которой можно выразить все части и целые. Тогда пересчет доли при изменении целого не будет вызывать затруднений. Как и раньше, лучше выбрать эту единицу так, чтобы все измерялось целыми числами.

4.7. Слава взял у товарища книгу на 3 дня. В первый день он прочитал полкниги, во второй — треть остатка, в третий — вдвое меньше, чем за первые два дня вместе. Успел ли Слава прочитать книгу?

Ответ: да, успел.

Решение. Условно разделим книгу на 12 одинаковых глав. Тогда в первый день Слава прочел 6 глав. Во второй день он прочел треть из 6 оставшихся глав, то есть 2 главы. Всего за два дня он прочел 8 глав, значит, в третий день он прочел $8:2=4$ главы. Всего за три дня он прочел $6+2+4=12$ глав, то есть как раз всю книгу.

Комментарий. Как догадаться делить именно на 12 глав? Да просто перемножим все встретившиеся в условии знаменатели... Впрочем, это мы взяли с запасом, хватило бы поделить на 6 глав.

4.8. У Вити на дне рождения было четверо друзей. Первому он отдал пятую часть пирога, второму — четверть остатка, третьему — треть остатка, а остальное поделил пополам с четвертым другом. Кому достался самый большой кусок?

Ответ: никому: все получили поровну.

Решение. Мысленно разделим пирог на 5 одинаковых порций. Тогда первому Витя отдаст одну порцию, останется 4 порции. Четверть остатка — это как раз одна порция. Витя отдаст второму эту порцию, останется три порции. Третьему Витя отдаст треть, то есть опять одну порцию. Оставшиеся две порции он поделит между собой и четвертым. Значит, все получили ровно по одной порции, то есть поровну.

4.9. После того как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

Ответ: на четверть.

Решение. Выберем чашку подходящего объема, чтобы в банке было ровно 12 чашек компота. Съев половину персиков, Наташа понизила уровень компота на треть, то есть на $12:3=4$ чашки. Это значит, что половина персиков по объему занимает 4 чашки, то есть осталось тоже 4 чашки персиков. А компота осталось $12-4=8$ чашек.

Половина оставшихся персиков — это 2 чашки. Они составляют $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ оставшегося компота. Значит, если их съесть, объем компота понизится на четверть.

Комментарий. Кроме работы с дробями задача сложна еще и тем, что надо сравнивать объем «твердых» персиков с объемом «жидкого» компота.

См. также задачи Д2.21, Д4.1, Д4.3, Д4.6, Д4.7, Д4.8, Д4.11, Д6.22.

Проценты

Проценты — это тоже дроби. Так, $80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8$. Проценты — это тоже доли, при работе с ними также важно следить за изменением *целого*, то есть того, от чего берется процент. Еще надо понять, что увеличение (уменьшение) на какое-то число процентов можно сначала посчитать в процентах, а потом умножить на соответствующую дробь. Например, если Петин рост был 150 см и увеличился на 20%, то он стал $100\% + 20\% = 120\% = 1{,}2$ от прежнего роста. Значит, теперь Петя вымахал до $1{,}2 \cdot 150 = 180$ см. Не забудьте про «эффект плюс-минус 1»: 100% надо прибавить, даже если прирост оказался больше 100%. Например, если спам увеличился на 120%, то он вырос не в 1,2 раза, а в $100\% + 120\% = 1 + 1{,}2 = 2{,}2$ раза!

4.10. За зиму и весну медведь похудел на 20%, а потом за лето и осень поправился на 20% по сравнению с концом весны. Стал медведь за год толще или худее? На сколько процентов?

Ответ: медведь похудел на 4%.

Решение. Вес похудевшего медведя составил $100\% - 20\% = 80\%$ от прежнего. Значит, он был умножен на $\frac{80}{100}$, то есть на 0,8. Вес потолстевшего медведя составил $100\% + 20\% = 120\%$ от веса в конце весны, то есть, этот вес был умножен на 1,2. Итого исходный вес был умножен сначала на 0,8, а затем на 1,2, то есть умножен на $0{,}8 \cdot 1{,}2 = 0{,}96$. Так как $0{,}96 < 1$, вес уменьшился. Новый вес равен 96% от старого, значит, медведь похудел на $100\% - 96\% = 4\%$.

4.11. В магазине книга стоила в мае 880 р. В июне она заметно подешевела, в результате число проданных экземпляров увеличилось на 120%, а выручка увеличилась на 5%. Сколько стоила книга в июне?

Ответ: 420 руб.

Решение. Пусть в мае было продано $5n$ экземпляров и за них было выручено $880 \cdot 5n = 4400n$ руб. В июне было продано

$$5n \cdot (100\% + 120\%) = 5n \cdot 2{,}2 = 11n \text{ экземпляров.}$$

За них выручено

$$4400n \cdot (100\% + 5\%) = 4400n \cdot 1{,}05 = 4620n \text{ руб.}$$

Значит, цена книги в июне составила

$$\frac{4620n}{11n} = 420 \text{ руб.}$$

4.12. Популярность премьер-министра Анчурии в прошлом году снизилась на столько же процентов, на сколько и в этом. В результате за два года она снизилась на 51%. На сколько процентов в год снижалась популярность?

Ответ: на 30%.

Решение. Каждый год популярность умножалась на одно и то же число, поэтому в результате умножилась на квадрат числа. Сейчас она составляет $100\% - 51\% = 49\%$ от прежней. Но $49\% = 0{,}49 = 0{,}7^2$. Итак, каждый год популярность составляла $0{,}7 = 70\%$ от прежней, то есть снижалась на $100\% - 70\% = 30\%$.

См. также задачи Д4.15, Д4.17, Д4.18, Д4.19, Д5.19.

Средние

Использование среднего арифметического помогает заменить сложение умножением, ведь сумма равна произведению среднего на число слагаемых. А далее надо просто считать суммы и внимательно следить за количеством слагаемых.

Если к каждому из чисел набора прибавить одно и то же число (положительное или отрицательное), то и к среднему арифметическому прибавится то же число. Это позволяет следить только за добавками к среднему (или к числу, которое близко к среднему), что облегчает практические вычисления.

4.13. Футбольная команда состоит из вратаря и 10 полевых игроков. Средний возраст футболиста 21 год, полевого игрока — 20 лет. Сколько лет вратарю?

Ответ: 31 год.

Решение. Сумма возрастов всех футболистов равна $11 \cdot 21 = 231$, полевых игроков — $10 \cdot 20 = 200$. Значит, возраст вратаря равен $231 - 200 = 31$ год.

4.14. В секции 6 боксеров тяжелых весов, остальные 24 — легковесы. Средний вес тяжеловеса на 20 кг больше среднего веса боксера. На сколько средний вес легковесов отличается от среднего веса боксера, и в какую сторону?

Ответ: меньше на 5 кг.

Решение. Отнимем от всех весов средний вес боксера. Тогда среднее по всем боксерам будет 0, среднее по тяжеловесам будет 20 кг; сумма по всем будет 0, а сумма по тяжеловесам будет $6 \cdot 20 = 120$ кг. Значит, сумма по легковесам равна -120 кг, а среднее по ним равно $-120 : 24 = -5$ кг.

4.15. В магазин завезли 30 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывала средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщала, что если все будут покупать именно по этому среднему весу, то оставшегося сыра хватит ровно на 10 покупателей. Сколько сыра осталось в магазине после первых 5 покупателей?

Ответ: 20 кг.

Решение. Количество проданного сыра не изменилось бы, если бы все 5 покупателей купили бы именно по вычисленному среднему количеству. Продавая по столько же следующим 10 покупателям, продадим все. Сыр распределится поровну между 15 покупателями, значит, каждому достанется по $30 : 15 = 2$ кг. Поэтому сыра оставалось $2 \cdot 10 = 20$ кг.

См. также задачи 2.8, Д3.24, Д4.2, Д4.5, Д4.9, Д4.13, Д6.7.

Смеси и переливания

Цена за килограмм, процентное содержание спирта и даже температура — величины относительные: их можно вычислять как отношение некоторой выбранной величины (общей стоимости, объема чистого спирта и т. п.) к общему количеству смеси. Решение задачи часто сводится к их выявлению и подсчету.

Полезно помнить *правило отношения объемов* при смешивании: если при смешивании объемы относятся как $a:b$, то отношение разниц между процентным содержанием смеси и процентными содержаниями исходных величин будет $b:a$ (обратным). Например, если смешать воду с соленостью 5% и воду с соленостью 1% в отношении $3:1$, то соленость смеси будет 4%, поскольку это втрое ближе к 5%, чем к 1%: $(5-4):(4-1)=1:3$.

4.16. В палатку привезли два сорта конфет с разной ценой: 3 кг по цене 90 рублей за килограмм и 2 кг по цене 60 рублей за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?

Ответ: 78 руб./кг.

Решение. Стоимость всех привезенных конфет равна

$$90\cdot 3+60\cdot 2=390 \text{ (руб.)},$$

а всего привезено 5 кг конфет. Значит, цена смеси («средняя стоимость килограмма») равна $390:5=78$ (руб.).

4.17. Три героя фильма «Самогонщики» гонят самогон, каждый своим аппаратом. У Труса течет жидкость крепостью a градусов, и стандартная бутыль наполняется за a часов; у Балбеса соответственно — b градусов и за b часов, у Бывалого — c градусов и за c часов. Для ускорения процесса персонажи направили все шланги в одну бутыль и наполнили ее за сутки. Какова крепость смеси? (Примечание: крепость — это процент содержания спирта.)

Ответ: 72°.

Решение. После заполнения бутыли Трусом доля чистого спирта в ней будет $\frac{a}{100}$. Пусть объем бутыли равен 100 стаканов подходящего размера. Тогда в ней a стаканов спирта. Это количество выработано за a часов, значит, в час производился один стакан чистого спирта (остальную жидкость мы не считаем). Точно так же вычисляем, что и остальные аппараты производят по стакану чистого спирта в час. За сутки (то есть за 24 часа) три аппарата дадут $3\cdot 24=72$ стакана чистого спирта, поэтому крепость смеси будет $\frac{72}{100}=72\%=72°$.

4.18. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты водой температуры 60°, а из холодного — за 17 минут водой температуры 20°. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны температура воды была 44°) (потерями тепла пренебречь)?

Ответ: через 7 минут.

Решение. Посчитаем, на сколько нужная температура отличается от температур в кранах: она равна $60-44=16°$ для горячей и $44-20=24°$ для холодной воды. Отношение разниц составляет $16:24=2:3$. Значит, отношение объемов горячей и холодной воды должно быть обратным: $3:2$, то есть горячей воды надо налить $\frac{3}{5}$ ванны, а холодной — $\frac{2}{5}$. Теперь времена легко считаются: горячий кран должен быть открыт $23\cdot\frac{3}{5}=13{,}8$ мин, холодный — $17\cdot\frac{2}{5}=6{,}8$ мин, а разница времен равна $13{,}8-6{,}8=7$ мин.

См. также задачи Д4.6, Д4.10, Д4.16, Д6.11.

Дополнительные задачи

Д4.1. У Тани и Вани денег поровну. Какую часть денег должен отдать Ваня Тане, чтобы у Тани стало вдвое больше, чем у Вани?

Д4.2. Из команды ушел баскетболист ростом 192 см, при этом средний рост команды не изменился. Чему он может быть равен?

Д4.3. Представьте 1 как сумму трех различных правильных дробей с числителями 1.

Д4.4. Лошадь съедает копну сена за 4 суток, корова — за 6, овца — за 12 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

Д4.5. В классе 20 человек сдавали ЕГЭ по математике, а остальные 10 человек — по литературе. Средняя оценка по математике равна 4,2, а по литературе — 4,5. Какова средняя оценка по ЕГЭ в целом по классу?

Д4.6. Девять голодных школьниц за час набирают корзину клубники и наедаются досыта. Сытые школьницы клубнику не едят, поэтому набирают корзину за час вшестером. Сколько голодных школьниц можно накормить досыта корзиной клубники?

Д4.7. Можно ли от куска веревки длиной $\frac{16}{31}$ м отрезать ровно полметра, пользуясь только складыванием пополам?

Д4.8. В магазин привезли три разных мешка с сахаром. Половина первого мешка весит в 6 раз больше, чем треть второго мешка. Половина второго мешка весит в 9 раз больше, чем треть третьего мешка. Во сколько раз треть первого мешка тяжелее половины третьего мешка?

Д4.9. Команда А из 5 человек и команда Б из 6 человек играли в баскетбол. Средний рост команд был одинаков. Когда Вася перешел из Б в А, средний рост в команде А увеличился на 2 см. А как изменился средний рост в команде Б?

Д4.10. Есть два одинаковых стакана, в которые налито поровну: в один — молоко, в другой — кофе. Из первого стакана переливают ложку молока в стакан с кофе. Потом тщательно размешивают, и из второго стакана обратно в первый переливают ложку кофе с молоком. Что теперь больше: процент молока в стакане с кофе или процент кофе в стакане с молоком?

Д4.11. В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удается списать, он отвечает правильно, а иначе отвечает наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на $\frac{1}{5}$ часть). За год двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

Д4.12. Клетчатая таблица называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы, например, см. рис. Существует ли магический квадрат 3×3, заполненный числами, обратными натуральным?

9	5	1
4	3	8
2	7	6

Д4.13. Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто — мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то, ни другое. У любителей футбола средний балл по математике меньше 4, у любителей мультиков — тоже. Может ли в классе в целом средний балл по математике быть больше 4? (Напомним, что среднее нескольких чисел — это сумма этих чисел, деленная на их количество.)

Д4.14. Представьте дробь $\frac{14}{45}$ как сумму двух положительных обыкновенных дробей с однозначным знаменателем (найдите все решения).

Д4.15. Леспромхоз решил вырубить сосны в лесу, что сильно встревожило экологов. Но директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После рубки их останется 96% от всех деревьев». Сколько процентов леса вырубит леспромхоз?

Д4.16. Есть три сосуда 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Как с помощью переливаний (и перемешивания смеси) получить 6 л смеси воды с сиропом в пропорции 1 : 1? (Лить можно из крана или из сосуда в другой сосуд. Льют, либо пока сосуд, в который льют, не наполнится, либо пока сосуд, откуда льют, не опустеет.)

Д4.17. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки ему хотя бы на квас, если цены вырастут еще на 20%?

Д4.18. В открытии Олимпиады участвовали менее 2014 спортсменов, из них ровно $\frac{1}{99}$ часть — рекордсмены. Всех спортсменов построили прямоугольником. Оказалось, что рекордсмены есть не менее чем в 44% продольных рядов и не менее чем в 44% поперечных. Сколько всего спортсменов?

Д4.19. В одном стакане было 100 мл раствора кислоты, причем доля кислоты (по объему) составляла 40%, а в другом — 150 мл с долей кислоты 50%. Ложку раствора из первого стакана перелили во второй и после перемешивания такую же ложку перелили из второго в стакана в первый. В результате доля кислоты в каждом из стаканов по-прежнему выражалась целым числом процентов.

а) Найдите доли кислоты в стаканах после переливаний.

б) Найдите вместимость ложки (объем ложки меньше стакана).

Решения и указания

Д4.1. *Ответ*: $\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть все деньги поделены на 6 одинаковых пачек. Тогда у Вани и Тани их по 3 пачки. Если Ваня отдаст Тане одну пачку, у него останется только 2 пачки, а у нее станет 4 — как раз вдвое больше. Но одна пачка из трех — это $\frac{1}{3}$ Ваниных денег.

Д4.2. *Ответ*: 192 см.

Решение. Пусть средний рост был и остался s. Тогда суммарный рост оба раза был равен произведению s на число игроков в команде. С уходом игрока число уменьшилось на 1, значит, произведение уменьшилось на s. В то же время суммарный рост уменьшился на 192 см. Значит, $s = 192$ см.

Д4.3. *Ответ*: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

Указание. По принципу Дирихле есть дробь больше $\frac{1}{3}$, то есть $\frac{1}{2}$. Сумма двух других равна $\frac{1}{2}$, поэтому одна из них больше $\frac{1}{4}$, то есть равна $\frac{1}{3}$. Итак, все три слагаемых находятся однозначно.

Д4.4. *Ответ*: за 2 дня.

Решение. Разделим копну на 12 одинаковых снопов. Тогда за день лошадь съедает 3 снопа, корова — 2, овца — 1 сноп. Вместе они едят 6 снопов в день, значит, съедят все 12 снопов за 2 дня.

Д4.5. *Ответ*: 4,3.

Решение. Сумма оценок по математике равна $20 \cdot 4{,}2 = 84$, по литературе — $10 \cdot 4{,}5 = 45$. Тогда сумма оценок по всем 30 ученикам равна $84 + 45 = 129$, а средняя оценка равна $\frac{129}{30} = 4{,}3$.

Д4.6. *Ответ*: 18.

Решение. Разделим корзину на 18 кружек ($18 = \text{НОК}(6, 3)$). Тогда голодная школьница за час набирает в корзину две кружки клубники и сколько-то съедает. А сытая школьница набирает 3 кружки. Значит, голодная школьница успевает съесть одну кружку и наесться. Поэтому корзиной можно накормить 18 голодных школьниц.

Д4.7. *Ответ*: можно.

Решение. Если отрезать полметра, то останется кусок длины $\frac{16}{31} - \frac{1}{2} = \frac{1}{62}$. Поэтому можно вместо полуметра отрезать кусочек длиной $\frac{1}{62}$ метра. Сравним эту длину с той, что есть: $\frac{16}{31} : \frac{1}{62} = 32$. Заметим, что $32 = 2^5$, то есть нужный кусок составляет $\frac{1}{2^5}$ исходного. Такую часть можно получить, сложив исходную веревку вдвое, затем еще раз вдвое и так всего 5 раз.

Д4.8. *Ответ*: в 16 раз.

Решение. Разделим третий мешок (как явно самый маленький) на 6 равных кульков (чтобы и половина, и треть были целыми). Будем все измерять в кульках, пересчитывая последовательно. Тогда треть третьего мешка — это $6:3=2$; половина второго мешка — это $9\cdot 2=18$; целый второй мешок — это $2\cdot 18=36$; треть второго мешка — это $36:3=12$; половина первого мешка — это $6\cdot 12=72$; целый первый мешок — это $2\cdot 72=144$; треть первого мешка — это $144:3=48$; половина третьего мешка $6:2=3$. А 48 больше 3 в $48:3=16$ раз.

Д4.9. *Ответ*: уменьшился на 2,4 см.

Решение. Пусть средний рост в обеих командах был s. Тогда суммарный рост в команде А был $5s$, а в Б — $6s$. После прихода Васи в А суммарный рост там увеличился на рост Васи и стал $6(s+2)$. Следовательно, рост Васи $6(s+2)-5s=s+12$. Поэтому суммарный рост в команде В уменьшился на $s+12$, став равным $6s-(s+12)=5s-12$. Тогда средний рост стал равен $(5s-12)/5=s-2{,}4$, уменьшившись на 2,4 см.

Д4.10. *Ответ*: одинаково.

Решение. Количество жидкости в стаканах до переливаний и после них осталось прежним. Пусть в результате двух переливаний из первого стакана во второй попало x л молока. Чтобы количество жидкости в первом стакане восстановилось до исходного, туда должно было попасть из второго x л кофе (вытесненного молоком). Поскольку равны общие объемы и количество «чужой» жидкости, равны и проценты.

Для придир. Если объемы стаканов равны V, то процентные доли кофе в молоке и молока в кофе обе равны $\frac{x}{V}\cdot 100\%$.

Д4.11. *Ответ*: $\frac{3}{8}$.

Решение. Пусть двоечник Вася сам правильно угадал n ответов. Это лишь $\frac{1}{5}$ несписанных ответов. Значит, всего несписанных ответов $5n$. Из них $5n-n=4n$ — неправильные. Значит, правильных ответов тоже $4n$. Из них на n Вася ответил самостоятельно, поэтому $4n-n=3n$ — списал. А всего он дал $4n+4n=8n$ ответов. Доля списанных ответов равна $\frac{3n}{8n}=\frac{3}{8}$.

Д4.12. *Ответ*: существует.

Решение. Рассмотрим магический квадрат, приведенный в условии. Умножив все числа таблицы на любое число, мы получим новый магический квадрат (ведь все суммы рядов умножатся на то же число и не перестанут быть равными). Выберем в качестве множителя число $\frac{1}{9!}$, обратное произведению всех чисел таблицы. Тогда каждую дробь можно будет сократить на числитель, после чего все числители станут равны 1: $\frac{1}{9!}$,

$$\frac{2}{9!}=\frac{1}{3\cdot\ldots\cdot 9},\ \ldots,\ \frac{9}{9!}=\frac{1}{8!}.$$

Замечание. Вместо произведения можно взять любое общее кратное чисел таблицы, в частности их НОК.

Д4.13. *Ответ*: может.

Решение. Пусть в классе всего 6 человек: Антон, Боря, Вася и Петя любят футбол, Вася, Петя, Галя и Даша — мультики, у Васи по математике 2, у Пети — 3, у остальных — 5. Тогда средний балл по классу $(5+5+5+5+2+3):6=4\frac{1}{6}>4$, а у любителей футбола и любителей мультиков $(5+5+2+3):4=3\frac{3}{4}<4$.

Д4.14. *Ответ*: $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$.

Решение. Складывая дроби, можно привести их к общему знаменателю, который равен произведению знаменателей слагаемых. Если потом дробь удастся сократить, то ее знаменатель будет делителем произведения знаменателей. Значит, 45 — делитель произведения двух однозначных чисел. Но произведение двух однозначных не более 81. Среди таких чисел на 45 делится только само число 45. Его можно единственным образом представить как произведение однозначных: $45=5\cdot 9$. Сумма двух самых маленьких дробей со знаменателями 5 и 9 — это $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{14}{45}$, значит, заменить никакую из дробей нельзя, и других решений нет.

Д4.15. *Ответ*: 75%.

Решение. До вырубки 1% деревьев в лесу — не сосны (назовем их ели). После вырубки их станет $100\%-96\%=4\%$. Доля елей увеличилась в 4 раза, их количество не изменилось. Но доля — это дробь: в числителе — число елей, в знаменателе — число деревьев в лесу. Если дробь увеличилась в 4 раза без изменения числителя, то знаменатель уменьшился в 4 раза. Значит, было вырублено $\frac{3}{4}$ всех деревьев, то есть 75%.

Д4.16. *Решение.* Колонки таблицы означают состояния вначале и после каждого переливания. Размеры сосудов обозначены римскими цифрами, жирными цифрами обозначено, сколько в сосуде сиропа, тонкими — воды.

III	**3**	0	0	3	0	**3**	**3**	**1**	0	1,5+**1,5**	0	0
IV	0	**3**	**3**	**3**	**3**	0	2	2+**2**	2+**2**	0,5+**0,5**	0,5+**0,5**	0,5+**0,5**
V	0	0	5	2	2	2	0	0	**1**	**1**	1,5+**2,5**	2,5+**2,5**

Прокомментируем переливания. Сначала традиционными переливаниями получаем 2 л воды в сосуде IV. Долив туда 2 л сиропа, получим 4 л смеси в нужной пропорции. Перелив оставшийся сироп в сосуд V, добавим туда (с помощью сосуда III) 3 л смеси и 1 л воды. В итоге в сосуд V попадет 1 л сиропа, 1 л воды (уже сиропа и воды поровну), а также 3 л смеси (тоже воды и сиропа поровну), значит, и там получится смесь в нужной пропорции.

Д4.17. *Ответ*: хватит.

Решение. Пусть денежка равна 5 грошам. После первого подорожания хлеб и квас стали стоить 6 грошей. Чтобы сэкономить недостающий грош, Ломоносов отказался от половины хлеба. Значит, полхлеба теперь стоит грош, а квас $5-1=4$ гроша. Во второй раз квас подорожает на $20\% \cdot 4 = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$ гроша и будет стоить 4,8 гроша. Значит, Ломоносову 5 грошей на квас хватит.

Д4.18. *Ответ*: 1980.

Решение. Пусть есть r рекордсменов, m поперечных и n продольных рядов. Тогда всего спортсменов $99r = mn$. Так как $99r < 2014$, получаем, что $r < \frac{2014}{99} = 20\frac{34}{99}$, то есть $r \leqslant 20$. Число рекордсменов не меньше числа параллельных рядов с рекордсменами, то есть $r \geqslant 0{,}44m$ и $r \geqslant 0{,}44n$. Перемножив эти два неравенства, получим $r^2 \geqslant 0{,}44^2 mn = 0{,}44^2 \cdot 99r$, откуда $r \geqslant 0{,}44^2 \cdot 99 = 19{,}1664$, то есть $r \geqslant 20$. Итак, $r = 20$, а всего участвовало $99 \cdot 20 = 1980$ спортсменов.

Замечание. Можно еще убедиться, что условие задачи непротиворечиво и при 1980 спортсменах такое построение возможно. Выстроим спортсменов прямоугольником $44 \cdot 45$ и поставим 20 рекордсменов по диагонали от какого-нибудь угла. Тогда будет по 20 продольных и поперечных рядов с рекордсменами, и действительно $\frac{20}{44} > \frac{20}{45} > 0{,}44$.

Д4.19. *Ответ*: а) 43 и 48%; б) 37,5 мл.

Решение 1 (алгебраическое). а) Пусть в результате переливаний доля кислоты стала $(40+p)\%$ в первом стакане и $(50-q)\%$ — во втором. Объем кислоты в первом стакане увеличился при этом на p мл, а во втором — уменьшился на $\frac{150q}{100}=\frac{3q}{2}$. Отсюда $2p=3q$. А поскольку ясно, что $40+p<50-q$, то есть $p+q<10$, условиям задачи удовлетворяет ровно одна пара натуральных чисел: $p=3$, $q=2$. Итак, доля кислоты во втором стакане стала 48%.

б) Обозначим вместимость ложки через V. Так как после первого переливания во втором стакане стало $75+0{,}4V$ мл кислоты в $150+V$ г раствора, V находится из уравнения $\frac{75+0{,}4V}{150+V}=0{,}48$.

Решение 2 (арифметическое). а) Назовем первый раствор *вином*, а второй — *уксусом*. Как известно, в результате переливаний объем уксуса в вине равен объему вина в уксусе (см. задачу Д4.10). Назовем этот объем *ложечкой* (ложечка, разумеется, меньше ложки). Таким образом, вместо переливаний в условии можно отлить от каждого раствора по ложечке, а потом эти ложечки поменять местами. При вместимости ложечки в 10 мл мы забираем из первого стакана 4 мл кислоты, а возвращаем 5 мл. При этом объем кислоты в первом стакане увеличивается на 1 мл, а доля — на 1%. Во втором тот же 1 мл составляет $\frac{2}{3}\%$. Следовательно, чтобы обе доли выражались целым числом процентов, придется взять ложечку в 30 мл (при 60 мл обе доли сравняются — по 46%, что по условию невозможно). Тогда доля в первом стакане возрастет до 43%, а во втором — снизится до 48%.

б) В конце во втором сосуде находится 30 мл вина — $\frac{1}{5}$ объема. Значит, и после первого переливания вино в нем составляло пятую часть. Обратно мы перелили 30 мл уксуса, значит, вместимость ложки составляет $\frac{5}{4}\cdot 30=37{,}5$ мл.

5. ЛОГИКА И ПЕРЕБОР

Ученик, *понимающий* математику, отличается от ученика, *вызубрившего* математику, именно умением логически рассуждать, видеть варианты и систематически отделять нужные варианты от ненужных. Впрочем, вне математики рассуждать и искать варианты умеют многие школьники (без этого, например, не разберешься с новым мобильным телефоном). Опыт работы с младшими школьниками показывает, что на интересных задачах ими эти навыки усваиваются быстро и без особого труда. Надо лишь почаще обращать внимание на то, что логика в математике и логика в обычной жизни говорят об одном и том же, разве что немного разными словами. А будучи усвоенными и став привычными, эти навыки будут работать и на уроках математики в старших классах, облегчая усвоение материала. Кроме доказательства от противного легче пойдут и уравнения со многими корнями, отсеивание лишних корней, разбор разных случаев расположения в геометрии.

Можно или нельзя

Для многих математика начинается с вопроса «Можно ли?» и обоснования ответа на него. Пытаясь построить пример, надо быть готовым и к тому, что построить его не удастся. Если не получается, то, прежде чем что-то менять (например, увеличивать количество частей), полезно объяснить себе, почему не удается. Это только я не могу построить или это в принципе невозможно?

Задачи этого занятия подобраны так, чтобы показать «пограничные» ситуации. В них обычно два-три очень похожих вопроса. Однако небольшое изменение условия может изменить ответ на противоположный. Доказательства невозможности просты, специальных знаний не требуют. Наша цель — научить чувствовать границы между возможным и невозможным, и обосновывать невозможность.

5.1. Может ли сумма цифр трехзначного числа быть равна а) 22, б) 28?

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Подойдет, например число 778. Или число 994.

б) Даже если сделать все цифры самыми большими, их сумма будет $9+9+9=27$, что меньше 28.

5.2. Может ли произведение цифр трехзначного числа быть равно а) 22; б) 28?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. а) Число 22 делится на 11, а это простое число. Поэтому если 22 представлено как произведение, то какой-то множитель должен делиться на 11. Но никакая отличная от 0 цифра не делится на 11, поэтому хотя бы один сомножитель не будет цифрой.

б) Подойдут, например, 227 или 147.

Путь к решению. Любое такое число можно найти, разложив 28 на простые множители, и составив из них три однозначных сомножителя (или только два, а третьим тогда будет 1).

5.3. Петя и Вася часто играют между собой и записывают все результаты. Оказалось, что за каждые два месяца подряд в 2012 году у Пети в сумме больше побед, чем у Васи.

а) Может ли случиться, что в сумме за весь год у Пети меньше побед, чем у Васи?

б) Может ли случиться, что в сумме за первые 11 месяцев года у Пети меньше побед, чем у Васи?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. а) Разобьем весь год на 6 пар подряд идущих месяцев: январь + февраль, март + апрель и т. д. В каждой паре у Пети больше побед, чем у Васи, значит, и в сумме — тоже.

б) Пусть в нечетные месяцы выигрывал только Вася, по 6 раз в месяц. И пусть в четные месяцы выигрывал только Петя, по 7 раз в месяц. Так как в каждую пару соседних месяцев входят один четный и один нечетный, то в сумме за два месяца у Пети больше побед. Однако в 11 месяцах содержатся 6 нечетных и только пять четных месяцев, поэтому в сумме Вася победил $6\cdot 6=36$ раз, а Петя только $5\cdot 7=35$ раз.

Путь к решению. Чтобы придумать пример, полезно для каждого месяца написать только одно число: разность числа побед Пети и Васи. Далее предполагаем, что общая победа Васи возможна. Как такое могло быть? Разбивая на пары, видим, что последний месяц остается «непокрытым», и, так как по «покрытым» месяцам преимущество у Пети, в непокрытом месяце должен победить Вася. Двигая пары, видим, что непокрытым можно оставить любой нечетный месяц. Далее пробуем найти как можно более *простой* пример, где в одних месяцах одинаковое число побед у Васи, а в других — у Пети.

Замечание. Обратите внимание на то, что недостаточно просто привести пример, надо еще обосновать, почему он подходит. Соответственно, чем проще пример устроен, тем легче его обосновать!

См. также задачи 2.5, 2.9, 2.14, 2.15, Д3.15, Д5.2, Д5.7, Д5.9, Д5.11, Д5.13, Д5.20в, Д6.4, Д6.8.

Простой перебор

Налево пойдешь — коня потеряешь.
Направо пойдешь — костей не соберешь.
Прямо пойдешь — не воротишься.

Часто понятно с самого начала, что ответ нужно выбрать из нескольких очевидных вариантов. Надо только последовательно проверить варианты и определить, какие подходят, а какие — нет. Если надо найти все ответы, то придется проверять все варианты и не останавливаться, даже найдя подходящий. Точно так же придется перебирать до конца, когда нужно найти наилучший вариант или доказать, что ответ единственный.

Если нет готового списка вариантов, стоит проверить, не подойдет ли какой-нибудь стандартный список. Например, выбрать некоторое утверждение и разобрать два случая, когда оно верно и ложно. При работе с целыми числами часто отдельно разбирают случаи, когда величина четна и нечетна. Если числовой ответ $x = a$ угадан и проверено, что он подходит, то единственность можно доказать, сводя к противоречию случаи $x > a$ и $x < a$.

5.4. Произведение трех последовательных натуральных чисел равно 720. Найдите эти числа.

Ответ: 8, 9 и 10.

Решение. Пусть искомые три числа — это x, $x+1$ и $x+2$. Рассмотрим 3 случая.

Случай 1: $x=8$. Тогда произведение равно $8\cdot 9\cdot 10=720$. Это как раз числа из ответа.

Случай 2: $x<8$. Тогда $x+1<9$, $x+2<10$ и произведение меньше чем $8\cdot 9\cdot 10=720$. Не подходит.

Случай 3: $x>8$. Тогда $x+1>9$, $x+2>10$ и произведение больше чем $8\cdot 9\cdot 10=720$. Тоже не подходит.

Таким образом, ответ единственный.

5.5. Три путешественника увидели вдали зеленый остров.

— На этом острове больше ста пальм! — воскликнул первый.

— Нет, пальм на острове меньше ста, — возразил второй.

— Одна-то пальма на острове наверняка есть, — сказал третий.

Когда они высадились на остров, только одно из этих утверждений оказалось истинным. Сколько пальм было на острове?

Ответ: либо 100 пальм, либо ни одной.

Решение. Посмотрим на последнее высказывание. Рассмотрим два случая.

Случай 1: оно верно. Тогда два других неверны. Значит, пальма или пальмы на острове есть, но их не больше 100 и не меньше 100. Поэтому их ровно 100.

Случай 2: третье высказывание ложно. Значит, пальм на острове нет. Тогда из двух других высказываний первое ложно, а второе — верно (ведь $0<100$). И этот ответ подходит.

Комментарий. Список вариантов может быть и большим (и даже бесконечным), но если их рассматривать в правильном порядке, перебор заканчивается быстро.

5.6. Доля девочек в кружке больше 41%, но меньше 49%. Каково наименьшее возможное число участников кружка?

Ответ: 7.

Решение. Доля девочек выражается обыкновенной дробью. Нам надо найти в указанном интервале дробь с как можно меньшим знаменателем. Последовательно проверяем дроби со знаменателем 2, затем со знаменателем 3 и т. д. Чтобы показать, что дроби с нужным знаменателем нет, достаточно найти дроби с последовательными числителями, одну левее, другую правее интервала. Имеем

$$\frac{1}{2}=50\%>49\%,\ \frac{1}{3}<34\%<41\%,\ \frac{2}{3}>66\%>49\%,\ \frac{1}{4}=25\%<41\%,$$

$\frac{2}{4} = 50\% > 49\%$, $\frac{2}{5} = 40\% < 41\%$, $\frac{3}{5} = 60\% > 49\%$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} < 41\%$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} > 49\%$. А вот для дроби $\frac{3}{7}$ получаем $41\% < \frac{3}{7} < 49\%$, так как при приведении к общему знаменателю эти дроби дают верное неравенство

$$\frac{287}{700} < \frac{300}{700} < \frac{343}{700}.$$

См. также задачи Д5.8, Д5.10, Д5.15, Д6.13.

Логика

Стоит обратить внимание на логические цепочки, например, из того, что $a > b$ и $b > c$ следует, что $a > c$. Или: из того, что a делится на b и b делится на c, следует, что a делится на c.

При переборе случаев важно разобраться, что верно, а что неверно. Пусть вы узнали, что какое-то утверждение неверно. А что же тогда верно? Надо построить отрицание. Вот тут многие путаются, особенно если утверждение сложное, составлено из нескольких простых. В частности, важно научиться строить отрицания к высказываниям вида «Для каждого верно» и «Если верно А, то верно Б».

5.7. Ученики класса выстроились по росту. Учитель должен проверить, у всех ли рост больше 130 см. Он хочет измерить рост у как можно меньшего числа учеников. Сколько раз ему придется измерять?

Ответ: 1 раз.

Решение. Учителю достаточно измерить рост самого низкого ученика. Если он не выше 130 см, то утверждение уже *неверно*: не у всех рост больше 130 см. А если самый низкий выше 130 см, то остальные тем более выше. Значит, утверждение *верно*: рост больше 130 см у всех.

Комментарий. Чтобы доказать что-то для всех объектов, надо придумать общее рассуждение. Чтобы опровергнуть утверждение типа «для всех» или «у каждого», достаточно найти хотя бы один контрпример.

Замечание. Учитель должен убедиться, что ученики правильно понимают выражение «хотя бы один» как «1 или больше». Неопытные школьники порой воспринимают «хотя бы один» как «1 или меньше», основываясь на фразе «дайте хоть один» (и дадут либо 1, либо ничего).

5.8. На почте лежат 5 конвертов (см. рис.). Должно выполнятся правило: «Если конверт закрыт, то на его лицевой стороне должна быть марка». Сколько конвертов надо перевернуть, чтобы узнать, нарушено правило или нет?

Ответ: один (второй слева).

Решение. Правило введено только для закрытых конвертов, поэтому для открытых конвертов мы его применять (и тем более проверять) не можем. Значит, три правых конверта правило не нарушают. Самый левый закрыт и с маркой, он тоже правило не нарушает. А вот второй слева конверт лежит лицом вниз. Если там есть марка, то правило выполнено, а если нет — нарушено. Давайте его перевернем и посмотрим...

Комментарий. Ученикам непросто уяснить, почему утверждение «Если А, то В» верно, в частности, если неверно А. Легче всего это понять, если рассматривать условное утверждение как правило, а А — как условие применимости правила. Ну а если правило неприменимо, то оно и не нарушено!

5.9. Известно, что число N равно произведению одиннадцати натуральных сомножителей, больших 1. Пете надо было задано доказать, что если N пятизначно, то оно четно. Петя проверил, что если перемножить одиннадцать нечетных натуральных сомножителей, больших 1, то произведение будет больше 99999. Выполнил ли Петя задание?

Ответ: практически да.

Решение. Чтобы закончить доказательство, достаточно сказать: если N нечетно, то и все сомножители нечетны, но тогда в произведении больше 5 знаков.

Комментарий. Ученики должны понять, почему доказать «Если верно А, то верно и В» — то же самое, что и «Если В неверно, то и А неверно». На этом основано доказательство «от противного». Легче запомнить на примерах. Родители твердо пообещали Васе: «Если закончишь год без троек, купим тебе планшет». И если уж Васе планшет не купили, то как он закончил год?!

См. также задачи Д5.1, Д5.2, Д5.3, Д5.8, Д5.12, Д5.13, Д5.20в, Д6.13, Д6.16, Д6.17.

Полный перебор: составление списка

Выполняя перебор, важно не пропустить случаев. Для этого надо составить исчерпывающий список вариантов, и последовательно их разобрать. Если какой-то вариант пропущен, ответ может стать неполным или даже измениться на противоположный (скажем, получится «Нельзя» вместо «Можно»).

Кроме упомянутых выше часто встречается перебор по списку цифр, по делителям числа, по остаткам, по интервалам. Если список вариантов можно составить не одним способом, можно выбрать тот, который короче, или тот, который устроен проще.

5.10. В трехзначном числе 2*3 звездочка обозначает кляксу, которая упала на среднюю цифру. Известно, что число делится на 21. Восстановите число.

Ответ: 273.

Решение 1. У нас есть 10 вариантов для средней цифры. Последовательно деля на 21 числа 203, 213, 223, …, 293, видим, что на 21 делится только $273 = 21 \cdot 13$.

Решение 2. Выпишем все числа, кратные 21, в интервале от 200 до 300. Поскольку $9 \cdot 21 = 189 < 200$, а $15 \cdot 21 = 315 > 300$, подойдут 5 чисел: $10 \cdot 21 = 210$, $11 \cdot 21 = 231$, $12 \cdot 21 = 252$, $13 \cdot 21 = 273$ и $14 \cdot 21 = 294$. Как видим, подходит только 273.

5.11. Взяли 100 чисел. Выписали их всевозможные попарные произведения (среди выписанных могут быть и одинаковые числа). Ровно 1000 из выписанных произведений оказались отрицательными. Сколько среди исходных чисел могло быть нулей?

Ответ: 30 или 35.

Решение. Отрицательное произведение получается умножением отрицательного числа на положительное. Пусть среди взятых чисел n отрицательных и p положительных. Составим из них таблицу с n строками и p столбцами: слева от строки стоит отрицательное число, над столбцом — положительное, а на пересечении строки и столбца — их произведение. Так мы получим всевозможные отрицательные попарные произведения, и их будет столько, сколько клеток в таблице, то есть $np = 1000$. И n, и p больше 0, значит, оба меньше 100. Но 1000 можно разложить в произведение таких чисел лишь двумя способами: $20 \cdot 50$ или $25 \cdot 40$ (чтобы в этом убедиться, разложите число 1000 на простые миожители и выпишите все его делители). Поэтому ненулевых чисел среди взятых может быть лишь $20 + 50 = 70$ или $25 + 40 = 65$. Значит, нулевых будет $100 - 70 = 30$ или $100 - 65 = 35$.

5.12. На круговом треке соревновались два гонщика, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их седьмая встреча произошла на линии старта. Через сколько секунд после старта произошла эта встреча, если известно, что первый тратил на каждый круг на 30 секунд меньше второго?

Ответ: через 360, 100 или 36 с.

Решение. Между встречами гонщики вместе проезжают один круг. Значит, к моменту седьмой встречи они в сумме проехали 7 кругов, причем каждый проехал целое число кругов. Число 7 можно разложить в сумму натуральных чисел тремя способами: $1+6$, $2+5$ и $3+4$. Более медленный гонщик проехал меньше кругов, то есть 3, 2 или 1 круг. Тогда быстрый проехал соответственно 4, 5 или 6 кругов. Покрытые расстояния могут относиться как $3:4$, $2:5$ или $1:6$, а значит, так же относятся и их скорости. А времена прохождения одного круга находятся в обратной пропорции.

Случай $4:3$. Медленный проходит круг за $4t$, а быстрый — за $3t$ с. По условию $4t - 3t = 30$, $t = 30$, то есть медленный проходит круг за $4 \cdot 30 = 120$ с, а всю дистанцию — за $3 \cdot 120 = 360$ с.

Случай $5:2$. Времена на круг $5t$ и $2t$, разность $5t - 2t = 30$, $t = 10$, общее время $2 \cdot 5t = 100$ с.

Случай $6:1$. Времена на круг $6t$ и t, разность $6t - t = 30$, $t = 6$, общее время $1 \cdot 6t = 36$ с.

См. также задачи Д2.11, Д6.10, Д1.20, Д2.21, Д3.25б, Д5.4, Д5.6, Д5.7, Д5.14, Д5.16, Д5.18, Д6.14.

От противного

Рассуждение «от противного» очень распространено. Если надо доказать утверждение У, мы предполагаем, что У неверно, и из этого и условий получаем противоречие. Прием, казалось бы, беспроигрышный: мы получаем лишнее условие, а доказывать можем любое противоречие! Но это путь окольный, а если можно дойти прямо, без «от противного», то лучше доказывать прямо.

Все же метод «от противного» эффективен, когда надо доказать какое-то «плохое» свойство (не целость, непериодичность, иррациональность). Ведь «противное» в этом случае что-то «хорошее», с чем легче работать, поскольку оно обладает «хорошими» свойствами. Соответственно, при переборе двух взаимоисключающих случаев стоит начать с «хорошего» случая. Хорош этот метод и при работе с неравенствами, ведь «противное» к $x > a$ — это $x \leqslant a$, то есть тоже удобное для работы неравенство.

5.13. В вершинах пятиугольника записали по числу. Затем на каждой стороне записали произведение чисел в ее концах. Сумма всех десяти чисел равна 201,3. Докажите, что в какой-то вершине записано не целое число.

Решение. Предположим противное: все числа в вершинах целые. Тогда и попарные произведения целые, то есть числа на сторонах целые. Сумма 10 целых чисел тоже должна быть целой. Однако 201,3 — число не целое. Противоречие. Значит, в какой-то из вершин есть не целое число.

5.14. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

Ответ: 19 рыжиков и 11 груздей.

Решение. Если бы рыжиков было меньше 19, то остальных грибов было бы больше 11, то есть не менее 12. Выберем из них ровно 12. По условию среди них есть рыжик. Противоречие. Значит, рыжиков не меньше 19. Аналогично если груздей меньше 11, то из остальных можно выбрать 20 не груздей. Тоже противоречие. Но если рыжиков больше 19 или груздей больше 11, то всего грибов больше $19+11=30$ — опять противоречие. Отсюда ответ.

5.15. На доске написаны дроби $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2011}$. Можно ли выбрать из них семь дробей так, чтобы сумма каких-то четырех из них равнялась сумме оставшихся трех?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что дроби выбраны и суммы равны. Приведем все дроби к общему знаменателю. Так как все исходные знаменатели были нечетны, общий знаменатель (их НОК) тоже будет нечетным. Значит, в каждой дроби числитель и знаменатель домножили на нечетное число, поэтому и после приведения все числители нечетны. Теперь при сложении дробей складываются только числители. При сложении четырех нечетных числителей получится четное число, а трех — нечетное. Значит, в суммах числители не равны, но тогда и дроби не равны. Противоречие.

См. также задачи Д2.3, Д5.2, Д5.7, Д5.10, Д5.11, Д5.12, Д5.13б, Д5.20б, Д6.6.

Сокращение перебора

Перебор большого числа вариантов требует большого времени (особенно если его надо записать). Перебор по сложной схеме (когда случаи еще дробятся на подслучаи, которые тоже могут дробиться) несет риск, что какой-то вариант будет пропущен. Поэтому по возможности старайтесь использовать только короткий и прозрачный перебор.

Старайтесь в решении перебор оттянуть как можно дальше: чем больше вы уже будете знать, тем проще будет перебор. Проводите в первую очередь те рассуждения, которые доводятся до конца без перебора.

Хорошо, если это достигается выбором списка. Для правильного выбора списка перебора приходится проявлять изобретательность. Можно еще поделить список на группы случаев и разбирать группами, когда для всех случаев группы применяется единообразное рассуждение.

5.16. Найдите двузначное число, которое в 8 раз больше своей суммы цифр.

Ответ: 72.

Решение. Переберем все двузначные числа, кратные 8, — их всего 11: $16 \neq (1+6) \cdot 8$, $24 \neq (2+4) \cdot 8$, $32 \neq (3+2) \cdot 8$, $40 \neq (4+0) \cdot 8$, $48 \neq (4+8) \cdot 8$, $56 \neq (5+6) \cdot 8$, $64 \neq (6+4) \cdot 8$, $\mathbf{72 = (7+2) \cdot 8}$, $80 \neq$ $\neq (8+0) \cdot 8$, $88 \neq (8+8) \cdot 8$, $96 \neq (9+6) \cdot 8$.

Путь к решению. Собственно, надо проверить всего 90 двузначных чисел. Это легко сделать за 10 минут. Но вот если надо будет доказывать единственность ответа, то перебор лучше сократить. Можно, например, не проверять числа, у которых сумма цифр больше 12, — ведь тогда при умножении на 8 получается трехзначное число. Но это позволит отбросить только 21 число, остается все равно много. А вот соображение о делимости уже уменьшает количество настолько, что можно их достаточно быстро перебрать и коротко записать.

5.17. Жителя острова Невезения делятся на правдолюбов (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут). Как-то встретились три жителя: Ах, Ох и Ух. Один из них сказал: «Ах и Ох — оба лжецы», другой сказал: «Ах и Ух — оба лжецы» (но кто именно что сказал — неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трех жителей?

Ответ: двое.

Решение. Разберем два случая.

1. Обе фразы лживы. Тогда произнесли их два лжеца, а из упомянутых в них людей хотя бы один — не лжец (собственно, можно вычислить, что это Ах).

2. Неправда, что обе фразы лживы. Тогда по крайней мере одна из фраз правдива. Значит, произнес ее правдолюб, а упомянуты в ней двое лжецов.

Путь к решению. В этой задаче мало кто догадывается свести перебор к двум указанным случаям. Чаще ведут перебор случаев: среди жителей 0, 1, 2, 3 лжеца. Но, если посмотреть внимательно, в таком переборе возникают группы случаев. Объединяя в группы и отбрасывая заведомо противоречивые случаи, можно прийти к вышеприведенному решению.

5.18. Петя на несколько лет младше Васи, но в 2012 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. В каком году родились Петя и Вася?

Ответ: Вася родился в 1987 году, Петя — в 2005 году.

Решение. Поскольку самая большая сумма цифр за последние 2000 лет случилась в 1999 году (она равна $1+9+9+9=28$), Васе исполнилось не более 28 лет, то есть он родился не позднее $2012-28=1984$ года. Будем проверять десятилетиями, обозначая x последнюю цифру года рождения.

1) Если цифры года рождения $198x$, то $1980+x+(1+9+8+x)=$ $=2012$, откуда $x=7$. Вася мог родиться в 1987 году.

2) Если год рождения $199x$, то $1990+x+(1+9+9+x)=2012$, откуда $2x=3$, что невозможно.

3) Если год рождения $200x$, то $2000+x+(2+0+0+x)=2012$, откуда $x=5$. Вася или Петя могли родиться в 2005.

4) Если год рождения $201x$, то $2010+x+(2+0+1+x)=2012$, откуда $2x=-1$, что невозможно.

Замечание. Узнав, что год рождения — от 1984 до 2011, мы могли и просто перебрать эти 28 вариантов.

См. также задачи Д5.5, Д5.17, Д5.19, Д5.20а, Д6.12.

Дополнительные задачи

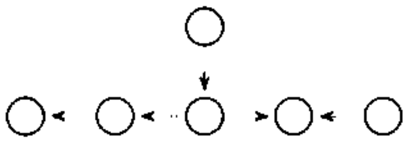
Д5.1. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Вчера он чихнул. «Сегодня будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он?

Д5.2. Рабочие языки конгресса: английский, китайский и русский. Оказалось, что в любой тройке участников как минимум двое могут поговорить друг с другом на каком-нибудь из рабочих языков. Можно ли выбрать такой язык, что все говорящие на нем говорят и еще на каком-нибудь?

Д5.3. В правительстве 20 министров. По крайней мере один из них честен. Из любых двух министров хотя бы один продажен. Сколько честных министров?

Д5.4. Из четырех неравенств $2x>70$, $x<100$, $4x>25$ и $x>5$ два верны и два неверны. Найдите значение x, если известно, что оно целое.

Д5.5. В кружочках написали числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 и от каждого числа к его делителю направили стрелку. Затем числа и часть стрелок стерли. Восстановите исходное положение.



Д5.6. Положительное число округлили до ближайшего целого и получили число, которое больше исходного на 28%. Чему могло быть равно исходное число?

Д5.7. Три яблока вместе весят 300 г. Веса любых двух яблок отличаются не более чем вдвое. Обязательно ли найдется яблоко, вес которого лежит между 75 г и 120 г?

Д5.8. У ювелира на витрине выложены в ряд по возрастанию веса 10 драгоценных камней. Ювелир утверждает, что любые два камня вместе тяжелее любого одного. За сколько взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить, прав он или нет?

Д5.9. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 на пять прямоугольников (не обязательно одинаковых) с периметром 2?

Д5.10. На шахматную доску поставили три коня и три ладьи так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой. Сколько коней бьют другого коня?

Д5.11. Можно ли расставить на окружности цифры 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы сумма каждых трех из них, идущих подряд, не превышала 13?

Д5.12. Было 12 карточек с надписями «Слева от меня — ровно 1 ложная надпись», «Слева от меня — ровно 2 ложных надписи», ..., «Слева от меня — ровно 12 ложных надписей». Петя разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число надписей теперь могло стать правдивыми?

Д5.13. а) Можно ли в 5 кружков на рис. 1 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

б) То же для рис. 2 (6 кружков).

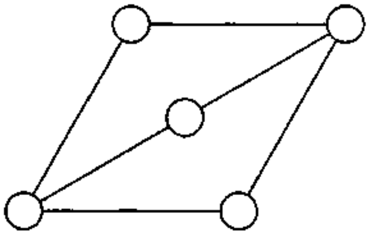


Рис. 1

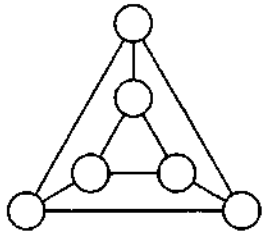
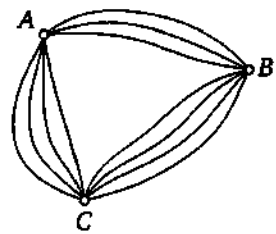


Рис. 2

Д5.14. Есть 12 внешне одинаковых монет двух сортов, по 6 каждого сорта. За одно взвешивание про любую группу можно узнать, сколько в ней монет первого сорта. Как за два взвешивания найти пару монет разного сорта? (Какая из них какого сорта, выяснять не надо.)

Д5.15. Десятизначное натуральное число назовем *редким*, если оно делится на произведение своих цифр. Сколько последовательных натуральных чисел могут быть редкими?

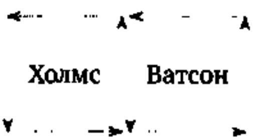
Д5.16. Пункты A, B и C соединены прямыми дорогами (хотя бы одна дорога между каждой парой городов). Известно, что между A и B есть всего 127 маршрутов (прямых и через C), а между A и C есть всего 164 маршрута (прямых и через B). Сколько всего маршрутов между B и C (прямых и через A)?



Д5.17. Из-за типографской ошибки последняя цифра натурального числа N напечаталась как показатель степени (например, $N = 128$ заменилось бы на 12^8). Результат оказался кратным N. Докажите, что количество таких N не более 200.

Д5.18*. Каждому из трех логиков написали на лбу натуральное число, причем одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

Д5.19*. Дорожки парка идут по периметрам двух квадратных газонов с одной общей стороной-дорожкой. По дорожкам гуляют с постоянными скоростями Холмс и Ватсон; каждый обходит свой газон против часовой стрелки. Скорость Холмса на 20% больше скорости Ватсона. Время от времени джентльмены встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?



Д5.20. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их всевозможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор −5, −2, 1, 3, 4, 6, 9. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в)* Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

г) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Д5.21. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их всевозможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Ответы и решения

Д5.1. *Ответ*: не обязательно.

Решение. Представим себе, что у Петиного кота случилась аллергия и он чихает каждый день, независимо от погоды. Будет ли он продолжать чихать за сутки до дождя? Да, конечно. Противоречия с условием нет. Но он будет чихать и за сутки до дня без дождя, поэтому наверняка предсказать дождь нельзя.

Д5.2. *Ответ*: можно.

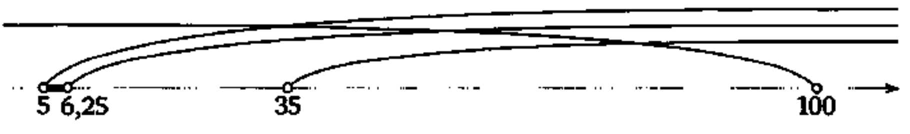
Решение. Предположим противное: выбрать нельзя. Тогда для каждого языка есть участник, говорящий только на нем. Выберем по такому участнику для каждого языка. В этой троице никто не может пообщаться, что противоречит условию.

Д5.3. *Ответ*: 1.

Решение. Выберем честного министра М. Помещая любого другого министра в пару с М, видим, что этот министр должен быть продажен. Значит, других честных министров нет, М уникален.

Д5.4. *Ответ*: 6.

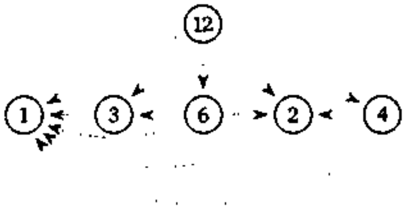
Решение. Эти неравенства равносильны соответственно неравенствам $x > 35$, $x < 100$, $x > 6{,}25$ и $x > 5$. Множество решений каждого из неравенств на числовой прямой накроем «крышей» (см. рис.). Нам подходят только решения, накрытые ровно двумя крышами: полуинтервал $5 < x \leqslant 6{,}25$. На нем есть только одно целое число — это 6.



Комментарий. Фактически числа 5, 6,25, 35 и 100 делят числовую прямую на 5 промежутков. Перебирая их, выбираем нужный.

Д5.5. *Ответ*: см. рис.

Решение. Идя по стрелочкам, можно дойти только до делителя. От верхнего кружка можно дойти до четырех других, а четыре делителя есть только у числа 12. От среднего кружка можно дойти до трех других, а из оставшихся чисел три делителя есть только у числа 6. До левого кружка от среднего можно дойти за 2 шага, а единственный делитель делителя числа 6 — это число 1. В кружке справа от 6 стоит делитель, который делит еще одно число из пока не расставленных: это может быть только 2, а справа от него — 4. В оставшийся кружок впишем 3. Осталось провести недостающие стрелки от 12 ко всем остальным и от всех к 1.



Комментарий. В этой задаче перебор казался неизбежным. Однако каждый раз его удавалось оттянуть: мы находили очередное место, где число восстанавливалось однозначно. Такие места называют *узкими*, в них степень свободы наименьшая.

Д5.6. *Ответ*: $\frac{25}{32}$ или $\frac{25}{16}$.

Решение. Округление было, очевидно, с избытком. Пусть число x округлилось до целого n. Тогда $n = 1{,}28x$ и ошибка округления $0{,}28x \leqslant 0{,}5$. Отсюда $x = \frac{25n}{32}$ и $0{,}28 \cdot \frac{25n}{32} \leqslant 0{,}5$, что эквивалентно тому, что $n \leqslant \frac{16}{7}$. Подходят только два натуральных числа: $n = 1$ и $n = 2$. Подставляя их, получаем вышеприведенные ответы.

Д5.7. *Ответ*: обязательно.

Решение. Предположим, что такого яблока нет. Тогда все яблоки делятся на малые ($\leqslant 75$ г) и большие ($\geqslant 120$ г). Малых может быть 0, 1, 2 или 3.

Случай 0. Если малых нет, то три больших в сумме весят не менее $3 \cdot 120 = 360 > 300$ г. Противоречие.

Случай 1. Одно малое и два больших. Большие весят не менее $2 \cdot 120 = 240$ г, значит, малое не больше $300 - 120 = 60$ г. Но тогда отношение большого к малому составляет как минимум $120:60 = 2$. Противоречие.

Случай 2. Два малых и одно большое. Малые весят не более $2 \cdot 75 = 150$ г, значит, большое не менее $300 - 150 = 150$ г. Но тогда отношение большого к малому составляет как минимум $150:75 = 2$. Противоречие.

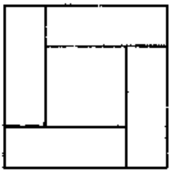
Случай 3. Если больших нет, то три малых в сумме весят не более $3 \cdot 75 = 225 < 300$ г. Противоречие.

Все случаи невозможны, значит, предположение неверно, и яблоко промежуточного веса есть.

Д5.8. *Ответ*: за одно взвешивание.

Указание. Достаточно положить на одну чашу два самых легких камня, а на другую — самый тяжелый.

Д5.9. *Ответ*: можно.



Решение. Пример см. на рисунке (четыре прямоугольника со сторонами $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$ и квадрат со стороной $\frac{1}{2}$).

Д5.10. *Ответ*: 0.

Решение. Предположим, что какие-то два коня бьют друг друга, тогда третий конь бьет какую-то ладью Л. Следовательно, он не находится с Л на одной горизонтали или вертикали, поэтому Л его не бьет. Если Л бьет другого коня, то этот конь побит дважды. А если Л бьет другую ладью, то Л побита дважды: этой ладьей и третьим конем. В обоих случаях получаем противоречие с условием.

Д5.11. *Ответ*: нельзя.

Решение. Предположим, что указанная расстановка существует. Сложим суммы всех указанных троек. Поскольку каждая из сумм не превосходит 13, а всего сумм 10, итоговая сумма не превосходит 130. С другой стороны, каждое число входит в итоговую сумму 3 раза, следовательно, итоговая сумма равна $3(1 + \ldots + 9) = 135$. Противоречие.

Д5.12. *Ответ*: 6.

Решение. Пример. Числа на карточках идут в таком порядке: 7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 11, 5, 12, 6. Тогда все утверждения с числами больше 6 ложны, так как даже общее число карточек слева меньше заявленного на карточке. Значит, утверждение с числом 1 истинно, поэтому истинно и утверждение с числом 2, и т. д. — истинны утверждения с числами не больше 6.

Оценка. Если истинных утверждений больше 6, то ложных меньше 6. Но тогда все карточки с числами от 6 до 12 «лгут», поэтому ложных больше 6. Противоречие.

Д5.13. а) *Ответ*: можно.

Решение. Например, 60 и 90 в концах диагонали, 2, 3 и 5 — в остальных кружках.

б) *Ответ*: нельзя.

Решение. Допустим противное: мы расставили числа нужным образом. Пусть в большом треугольнике стоят числа $a \geqslant b \geqslant c$, и число b еще соединено отрезком с числом d в малом треугольнике. Ясно, что a делится на b, а b делится на c. А для b и d возможны два случая.

Случай 1. Пусть b делится наd. Тогда по цепочке и a делится наd. Но a и d не соединены отрезком. Противоречие.

Случай 2. Пусть d делится на b. Тогда по цепочке d делится на c. Но d и c не соединены. Противоречие.

Д5.14. *Решение.* Достаточно либо найти пару монет разного сорта, либо выявить две группы монет, где в одной все первого сорта, в другой — все второго. Сначала взвесим 4 монеты. Возможны два случая.

Случай 1. Все эти монеты одного сорта, скажем первого. Взвесим 2 монеты из оставшихся. Если они разного сорта или обе второго сорта — все хорошо. Если же обе первого сорта, то все 6 *не взвешенных* монет — второго сорта.

Случай 2. В четверке есть монеты двух сортов. Взвесим 2 из них. Если они разного сорта — все хорошо. Если же обе одного сорта (скажем, первого), то из первого взвешивания мы знаем все про другую пару: монеты там либо разного сорта, либо обе второго сорта — все хорошо.

Д5.15. *Ответ*: 1, 2 или 3.

Решение. Пример трех редких чисел подряд: 1 111 111 111 делится на 1; 1 111 111 112 делится на 2; 1 111 111 113 делится на 3, так как его сумма цифр делится на 3.

Оценка. Рассмотрим четыре подряд идущих числа. Среди них два четных, и, так как разность между ними равна 2, оба не могут делиться на 4. Выберем четное число N, не делящееся на 4. Докажем, что N не редкое. Достаточно доказать, что произведение его цифр делится на 4 (в частности, может равняться нулю). Действительно, если последняя цифра числа N делится на 4, то и произведение цифр делится на 4. Если же последняя цифра 2 или 6, то предпоследняя цифра четна (иначе по признаку делимости число делилось бы на 4), поэтому произведение цифр кратно 4.

Д5.16. *Ответ*: 2012.

Решение. Пусть напрямую из A в B ведет x дорог, из A в C — y дорог, а из B в C — z дорог. Комбинируя в пары y дорог из A в C с z дорогами из C в B, получим yz маршрутов из A в B через C. Добавив к ним x прямых маршрутов, получим $x+yz=127$. Точно так же считаем маршруты между A и C: $y+xz=164$. Вычитая и раскладывая левую часть на множители, получаем $(x-y)(z-1)=37$. Так как $z>0$, второй сомножитель неотрицателен, поэтому первый — тоже. Простое число 37 можно разложить лишь на множители 1 и 37 в том или другом порядке. Отсюда получаем два случая: $x-y=37$, $z=2$ или $x-y=1$, $z=38$.

Случай 1. Выразив $x=y+37$ и подставив, получим $y+37+2y=$ $=127$. Отсюда $y=30$, $x=67$, $z+xy=2012$.

Случай 2. Выразив $x=y+1$ и подставив, получим $y+1+38y=$ $=127$, $39y=126$. Но 126 не делится на 39, поэтому случай невозможен.

Д5.17. *Краткое решение.* Пусть x^y кратно $N=10x+y$, где y — цифра. Тогда $10x=N-y$. Возведем обе части в степень y. Тогда левая часть кратна x^y и кратна N, поэтому правая тоже. Раскрыв правую часть по биному Ньютона, видим, что все слагаемые, кроме последнего, содержат множитель N. Значит, и последнее слагаемое y^y кратно N. Следовательно, N делит одно из чисел 1^1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5, 6^6, 7^7, 8^8, 9^9. Каждое из первых четырех чисел является делителем какого-нибудь из последних, поэтому их можно отбросить. Раскладывая остальные на простые множители, видим, что эти числа имеют по 6, 49, 8, 25 и 19 делителей соответственно, итого не более 107 вариантов.

Комментарий. Предложенный путь позволяет не только оценить количество таких чисел, но и найти их все. Обратите внимание на то, как мы за счет делимости перешли от неопределенного количества вариантов к конечному списку.

Д5.18. *Ответ*: у второго 20, у третьего 30.

Решение. Пусть x, y, z — числа, написанные на лбу первого, второго и третьего логика соответственно. Обозначим логиков для краткости Л1, Л2 и Л3.

Вначале, с точки зрения Л1, возможны варианты $x = y + z$ и $x = |y - z|$. Однако при $y = z$ второй вариант отпадает (логик знает, что его число больше 0), поэтому Л1 сможет узнать свое число. При $y \neq z$ формулы дают для x разные числа, поэтому Л1 однозначно определить его не может. Поскольку Л1 так и сказал, все знают, что $y \neq z$.

Теперь, с точки зрения Л2, возможны такие варианты: $y = x + z$ и $y = |x - z|$, причем $y \neq z$. Поэтому Л2 сможет узнать свое число, только если $x = z$ (тогда отпадает вариант $y = 0$) или $x = 2z$ (тогда отпадает вариант $y = |x - z| = z$). Значит, после второго высказывания все знают, что $x \neq z$ и $x \neq 2z$.

Тогда, с точки зрения Л3, возможны варианты $z = x + y$ и $z = |x - y|$, причем z не равно ни одному из чисел y, x или $\frac{x}{2}$. Понятно, что $x + y$ этим числам заведомо не равно. А вот $|x - y|$ может и совпасть. Приравнивая $|x - y|$ к 0, y, x или $\frac{x}{2}$, находим случаи, когда второй вариант мог оказаться невозможным и Л3 мог бы узнать свое число. Получаем, что это случилось бы только при $x \in \left\{y, 2y, \frac{y}{2}, \frac{2y}{3}\right\}$. Значит, после третьего высказывания все знают, что $x \notin \left\{y, 2y, \frac{y}{2}, \frac{2y}{3}\right\}$.

Теперь, с точки зрения Л1, возможны варианты $x = y + z$ и $x = |y - z|$. При этом известно, что $x \notin \left\{y, 2y, \frac{y}{2}, \frac{2y}{3}, z, 2z\right\}$ и $y \neq z$. Поэтому Л1 сможет догадаться, какое у него число, только если $y + z$ или $|y - z|$ равно одному из чисел y, $2y$, $\frac{y}{2}$, $\frac{2y}{3}$, z, $2z$ и $y \neq z$. Это возможно, только если $y - z$ равно одному из чисел $\frac{y}{2}$, $\frac{2y}{3}$, z, $2z$, $-y$, $-2y$, $-\frac{y}{2}$, $-\frac{2y}{3}$. В этих случаях $x = y + z$ и равно $\frac{3y}{2}$, $\frac{4y}{3}$, $3z$, $4z$, $3y$, $4y$, $5y/2$, $8y/3$ соответственно. Поскольку 50 не делится ни на 3, ни на 4, имеет место случай $x = \frac{5y}{2}$. Тогда $y = 20$, $z = 30$.

Д5.19. *Ответ*: через 35 минут.

Решение. Попросим садовника погулять вокруг газона Холмса симметрично Ватсону относительно общей стороны. Тогда садовник будет ходить вокруг газона *по часовой стрелке* и встречаться с Холмсом регулярно, через равные промежутки времени. А поскольку по общей дорожке садовник и Ватсон идут бок о бок, то Ватсон встречается с Холмсом тогда и только тогда, когда садовник встречается с Холмсом на общей дорожке.

Поскольку скорости Холмса и садовника относятся как $6:5$, между очередными встречами с садовником Холмс успевает пройти $\frac{6}{11}$ периметра квадрата, а садовник — $\frac{5}{11}$. С точки зрения движения по дорожке квадрат можно считать кругом. Отмеряя от произвольной точки по $\frac{6}{11}$ периметра, мы отметим ровно 11 точек встреч, которые разбивают круг на 11 равных частей. Обозначим эти точки P_1, P_2, ..., P_{11}, занумеровав их в порядке против часовой стрелки. Встречи Холмса и садовника происходят через равные промежутки времени T последовательно в точках P_1, P_7, P_2, P_8, P_3, P_9, P_6, P_{10}, P_7, P_{11}, P_8, P_1 и т. д.

Общая дорожка составляет ровно четверть круга. На нее могут попасть 2 или 3 отмеченные точки (4 точки не поместятся, так как расстояние между крайними будет $\frac{3}{11} > \frac{1}{4}$; а одна точка не сможет разбить четверть круга на промежутки, меньшие $\frac{1}{11}$).

Если на общей дорожке лежат какие-то три последовательные точки (пусть P_1, P_2 и P_3), то встречи в этих точках (а значит, и с Ватсоном) происходят через промежутки времени $2T$, $2T$, $7T$, $2T$, $2T$, $7T$, ... Поэтому $2T = 10$ мин и следующая встреча случится через $5T = 35$ минут.

Если же на общей дорожке лежат две последовательные точки (пусть P_1, P_2), то встречи в этих точках происходят через промежутки времени $2T$, $9T$, $2T$, $9T$, $2T$, $9T$, ... Это противоречит двум встречам подряд через равные промежутки времени, поэтому такой случай невозможен.

Путь к решению. То, что общая дорожка составляет только часть пути джентльменов, создает неприятную для решения нерегулярность встреч. Можно, конечно, учесть это с помощью дополнительных неравенств, но этот хлопотливый метод не для Холмса. В его духе привлечь подставное лицо и попросить подыграть.

Д5.20. *Ответ*: а) -5, 3, 6; б) 5 чисел; в) 6 чисел; г) не всегда.

Решение. а) Ясно, что задумано три числа и что среди задуманных есть как отрицательные, так и положительные числа (иначе все выписанные числа были бы одного знака). Не могут быть задуманы оба отрицательных числа, иначе на доске было бы еще одно отрицательное число — их сумма. Из отрицательных задумано -5 (прибавляя к -2 положительные числа, мы бы -5 не получили). Кроме того, задуманы два положительных числа, и их сумма равна наибольшему из выписанных чисел, то есть 9. Из выписанных чисел сумму 9 дают только 3 и 6. Нетрудно проверить, что набор -5, 3, 6 подходит.

б) *Пример.* $-10, -1, 0, 1, 10$. Ясно, что в нулевую сумму 10 и -10 входят или не входят парой, 1 и -1 — тоже парой. Поэтому числа 0, 1, 10 можно брать в любой комбинации (7 вариантов) и дополнять противоположными.

Оценка. Из трех чисел можно сделать лишь 7 сумм (включая суммы из одного слагаемого), и если все они равны 0, то и каждое число равно 0. Если есть набор из четырех чисел, то среди них не более одного нуля. Рассмотрим равные суммы из двух слагаемых. Заметим, что одно и то же число a не может входить в две такие суммы. Действительно, если $a+b=a+c$, то $b=c$, но по условию b и c различны. Противоречие. Значит, нулевых сумм из двух слагаемых максимум две. Если есть две нулевые суммы из трех слагаемых, то у них есть два общих слагаемых, поэтому третьи слагаемые равны — противоречие. Значит, есть максимум одна нулевая сумма из трех слагаемых. А сумма из четырех слагаемых единственна. Итого не более $1+2+1+1=5$ нулевых сумм, а надо 7 сумм. Поэтому чисел не менее пяти.

в) *Оценка.* Предположим, что среди задуманных чисел есть 0. Есть k нулевых сумм без слагаемого 0. Добавив к каждой из них 0, получим еще ровно k сумм с участием 0. И есть еще сам 0. Итого выписано $2k+1$ нулей. Но это количество нечетно, оно не равно 6. Противоречие. Значит, среди задуманных чисел нуля нет.

Пусть задумано n различных ненулевых чисел a, b, ..., z с суммой S. Суммы из $n-1$ слагаемого равны $S-a$, $S-b$, ..., $S-z$, а единственная сумма из n слагаемых равна $S=S-0$. Поскольку вычитались различные числа, все эти суммы тоже различны. Значит, среди них не более одного нуля. Поэтому должны быть суммы и с другим количеством слагаемых, кроме $n-1$ и n.

Рассмотрим равные суммы из двух слагаемых. Заметим, что одно и то же число a не может входить в две такие суммы. Действительно, если $a+b=a+c$, то $b=c$, но по условию b и c различны. Противоречие. Значит, каждое слагаемое входит не больше чем в одну такую сумму, а при $n \leqslant 5$ нулевых сумм из двух слагаемых не более двух.

Рассмотрим равные суммы из трех слагаемых. Заметим, что пара чисел a, b не может входить в две такие суммы. Действительно, если $a+b+c=a+b+d$, то $c=d$, но по условию c и d различны. Противоречие. Значит, если $n \leqslant 5$, то нулевых сумм из трех слагаемых не более двух (в две суммы уже войдут все 5 чисел, и любой другой набор из трех чисел должен совпасть по двум числам с одной из сумм).

Итак, при $n \leqslant 5$ нулевых сумм не более пяти: максимум одна из не менее чем $n-1$ слагаемого, и максимум по две из двух и из трех слагаемых. Шести сумм не нашлось.

Пример. При $n=6$ такое возможно: например, задуманы -21, -10, -1, 1, 10, 11. Нулевые суммы у наборов $\{-1, 1\}$, $\{-10, 10\}$, $\{-21, 10, 11\}$, $\{-10, -1, 11\}$, $\{-1, 1, -10, 10\}$, $\{-21, -1, 1, 10, 11\}$. Других наборов нет: -21 может входить только вместе с 10 и 11, а тогда -10 не входит (два набора). Если -21 не входит, то двузначные числа входят только по два разного знака (три набора). Наконец, без двузначных есть только один набор из двух однозначных чисел.

г) Набор -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 получается как из задуманных чисел -3, 1, 2, так и из чисел 3, -1, -2. Значит, по этому набору *однозначно* задуманные числа восстановить нельзя.

Комментарий. б) При поиске примера из 6 чисел полезно заметить, что сумма всех не равна 0, иначе все неполные наборы разбиваются на пары дополнительных, и общее число наборов нечетно.

Тогда не бывает трех пар с нулевой суммой и двух непересекающихся троек с нулевыми суммами (иначе сумма всех чисел равна 0). Эти наблюдения позволяют существенно сократить перебор вариантов.

г) Верен общий факт: если в наборе задуманных чисел с суммой 0 поменять все знаки на противоположные, то набор выписанных чисел не изменится. Действительно, пусть в исходном наборе можно получить сумму s. Сложив все числа, не вошедшие в эту сумму, получим число $-s$. А если теперь у всех чисел поменять знаки, то и сумма сменит знак и станет равна s. Значит, любую старую сумму можно получить из нового набора, и наоборот. Поэтому набор сумм не изменится.

Д5.21. *Ответ*: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 22 и 9, 10, 11, 11, 11.

Решение. а) Ясно, что из набора 2, 2, 2, 2 получаются все четные числа не более 8 и только они.

б) Предположим, что такой пример существует. Тогда ясно, что число 1 задумано (оно не может быть представлено как сумма двух или более натуральных чисел). Ясно также, что сумма всех задуманных чисел равна 22 (если сумма меньше, то 22 не было бы выписано, а если больше, то было бы выписано число, большее 22). Но тогда сумма всех чисел без одной единицы должна быть равна 21, а такое число не выписано. Противоречие.

в) Числа 9, 10 и 11 не могут быть представлены как суммы меньших чисел из набора, поэтому они задуманы. Аналогично предыдущему пункту сумма всех задуманных чисел равна 52. Выберем по одному экземпляру чисел 9, 10, 11, тогда сумма остальных задуманных чисел равна 22. Тогда это либо число 22, либо $11+11$ (сумма трех или более слагаемых как минимум $9+9+9$, что больше 22). Убедимся, что оба набора 9, 10, 11, 22 и 9, 10, 11, 11, 11 подходят. Достаточно проверить второй набор, потому что в нем любая сумма с не более чем одним числом 11 реализуется и в первом наборе, а в сумме с двумя или более экземплярами 11 два слагаемых 11 могут быть заменены на 22. Для второго набора проще всего заметить, что все выписанные числа имеют вид $k \cdot 11 - m$, где $m = 0, 1, 2, 3$. Взяв k раз по 11, при $m = 1$ заменим одно число на 10, при $m = 2$ — одно число на 9, при $m = 3$ — одно число на 9, другое — на 10.

6. ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

В жизни естественно возникают задачи «добиться как можно большего при данных затратах» или «добиться цели с наименьшими затратами сил». В математике им соответствуют задачи на поиск экстремума. Распространено заблуждение, что без знания производной к экстремумам не подступишься. На деле, однако, можно, нужно и полезно вводить такие задачи уже с 6 класса в виде задач на «Оценку + пример». Они готовят учащихся к изучению математического анализа, но это далеко не все. Главное — такие задачи естественно вводят ситуацию, где нужен *двусторонний* подход. Суть в том, что в задаче на оценку + пример недостаточно просто сделать выкладки и привести получившийся ответ. Обоснование ответа состоит из двух частей: *примера* и *оценки*, и каждая часть необходима. Пример (обычно это конструкция или алгоритм) показывает, почему заявленный ответ достижим. Оценка (обычно это доказательство некоторого неравенства) обосновывает, почему невозможно получить результат, лучший (скажем, больший), чем в заявленном примере. Бывает, что оценка строится от примера или пример — от оценки, но часто пример и оценка — две *независимые* части решения. Соответственно, непривычные к «двусторонности» школьники пропускают одну из половинок и затем не понимают, почему решение не засчитано.

Итак, решение «двусторонних» задач сильно развивает навык рассуждать логически. Собственно, без такого навыка задачу С6 не решить. Однако развить такой навык можно даже у семиклассника, и тогда ему станут доступны большинство задач этого раздела (среди них есть и пункты из задач С6 ЕГЭ прошлых лет).

Простейший пример

Можно и нужно учить строить примеры и получать оценки по отдельности. Пример нужно придумать и построить. Обычно у младших школьников это затруднений не вызывает, они охотно решают задачи типа «расставьте цифры», «разрежьте фигурку», «отмерьте воду», «перевезите на другой берег» и т. д. Как ни странно, иногда легче построить единственно возможный пример, чем какой-нибудь один из многих возможных. Неопытных это сбивает с толку: когда можно и так, и этак, то неясно, с чего начинать. Но ведь в жизни избыток возможностей не мешает: если все равно, где покупать, ищем нужный товар в магазине поближе, или в том, который лучше знаем, или там, где дешевле. Так и при поиске примера: главное — начать с чего-нибудь. Можно и нужно применять здравый смысл, естественные соображения. Они ограничивают поле для поиска примера, но зато поиск убыстряется и облегчается. Скажем, при построении числового примера можно попробовать сделать побольше чисел одинаковыми.

Вообще, ученики свой опыт сильно недооценивают. Ответом может оказаться хорошо знакомый объект, просто надо посмотреть на него под нужным углом.

6.1. Можно ли выписать несколько различных чисел по кругу так, чтобы каждое было равно сумме двух своих соседей?

Ответ: Да, например $1, 3, 2, -1, -3, -2$.

Путь к решению. Выпишем первые два числа наугад и будем подбирать следующее так, чтобы предыдущее было равно сумме двух соседей. Ясно, что не стоит брать нули. Плохо также, если второе в два раза больше первого — тогда третье равно первому. Зато отрицательные числа нам подходят, их бояться не надо. Начав с чисел 1 и 3 и дождавшись повтора (седьмое число равно первому), получим указанный в решении пример.

Замечание. Почти любая пара двух первых чисел даст пример из шести чисел. Подумайте почему.

6.2. Можно ли выписать больше ста натуральных чисел (не обязательно различных) так, чтобы их сумма была равна их произведению?

Ответ: можно.

Решение. Обычно произведение натуральных чисел больше их суммы. Но, добавив единицу, мы увеличим сумму на 1, а произведение не изменим. Возьмем теперь два числа, произведение которых больше суммы на 100, например 10 и 20: $10 \cdot 20 - (10 + 20) = 170 >$ > 100. Добавив к этим числам 170 единиц, получим нужный пример: $10, 20, 1, 1, \ldots, 1$ (170 единиц).

Путь к решению. Непросто работать с большим набором чисел. Но если среди чисел много одинаковых, то работать легче. Произведение натуральных чисел больше их суммы, если среди чисел нет единиц и сомножителей больше двух. Значит, возьмем побольше единиц. Случай, когда не равно 1 только одно число, не подходит: сумма и произведение не совпадут. Оставив два числа, не равных единице, мы можем легко следить за ними и в то же время имеем достаточно свободы для поиска решения.

6.3. Найдите хотя бы одно решение уравнения

$$28x+30y+31z=365$$

в натуральных числах.

Ответ: $x=1$, $y=4$, $z=7$.

Решение. Вспомним, что 365 — число дней в году, а 28, 30 и 31 — число дней в месяце: 28 дней — это только февраль, 30 дней — апрель, июнь, сентябрь и ноябрь, 31 день — в остальных 7 месяцах. Значит, подходят $x=1$, $y=4$, $z=7$.

Замечание. Есть еще решение $x=2$, $y=1$, $z=9$, но «бесплатно» его не найдешь, придется проводить не очень простые вычисления!

См. также задачи Д3.25, Д5.20в, Д6.3, Д6.5, Д6.7, Д6.17.

Принцип Дирихле

Простейшие оценки удобно получать с помощью принципа Дирихле. Для начинающих он более очевиден, чем рассуждение от противного или алгебраические неравенства.

1. *Принцип Дирихле.* В клетках сидят кролики. Если клеток меньше, чем кроликов, то найдется клетка, где сидят как минимум два кролика.

2. *Обобщенный принцип Дирихле.* Из нескольких кусков сыра найдется кусок, весящий не меньше среднего арифметического всех кусков, и кусок, весящий не больше среднего арифметического всех кусков.

Оба пункта доказываются «от противного».

1. Если бы в каждой клетке был максимум один кролик, то кроликов было бы не больше, чем клеток.

2. Если бы не было куска с весом не меньше среднего, то вес каждого был бы меньше среднего и, складывая, получили бы, что сумма весов кусков меньше общего веса.

Из принципа Дирихле мы получаем *неконструктивные* следствия: доказываем существование чего-либо, не предъявляя его явно.

Начинающим этот принцип доказывать не надо: он им очевиден. При решении задач надо только спрашивать (особенно вначале): что здесь клетки, а что — кролики. Знакомить с принципом Дирихле нужно еще до изучения метода от противного и до неравенств: это поможет подготовиться и к тому, и к другому.

6.4. В пакете лежат 100 конфет 9 сортов. Всегда ли найдутся 12 конфет одного сорта?

Ответ: всегда.

Решение. Разложим конфеты в 9 кучек по сортам. В среднем в кучке $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ конфет. По обобщенному принципу Дирихле есть кучка, где не менее $11\frac{1}{9}$ конфет. Но так как число конфет в кучке целое, в ней не менее 12 конфет. Они одного сорта.

6.5. В ковре 4×4 м моль проела 15 точечных дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик 1×1 м без дыр.

Решение. Разлинуем ковер на квадратные клетки со стороной 1 м. Получится 16 клеток, а 15 дыр попадут внутрь не более 15 клеток. Поэтому найдется клетка без дыры внутри, ее и вырежем.

6.6. В строку записаны 10 натуральных чисел. Докажите, что можно подчеркнуть одно или несколько чисел подряд так, чтобы сумма подчеркнутых чисел делилась на 10.

Решение. Будем искать набор чисел, сумма которых оканчивается на цифру 0. Рассмотрим 10 сумм: первое, первое + второе, первое + второе + третье, и так до суммы всех десяти чисел. Если какая-то из сумм оканчивается на 0, берем ее. Если таких сумм нет, рассортируем их по последней цифре. Есть 10 сумм и не более 9 вариантов последней цифры, значит, по принципу Дирихле найдутся две суммы с одинаковой цифрой. Значит, их разность оканчивается на 0. Однако меньшая сумма является началом большей. При вычитании начало сократится, и останется сумма подряд идущих чисел, что и требовалось!

Замечание. Точно так же доказывается, что из строки n целых чисел можно подчеркнуть одно или несколько чисел подряд так, чтобы сумма подчеркнутых чисел делилась на n. Нужно только вместо последней цифры следить за остатком от деления на n.

См. также задачи Д6.1, Д6.4, Д6.8, Д6.13, Д6.16, Д6.17.

Жадный алгоритм

Сложный пример строят, выполняя ряд простых шагов. Если цель — добиться максимума какой-то величины, то часто работает идея добиваться как можно большего прироста на каждом шаге. Если это удается, то тем самым, как правило, заодно доказывается, что результат действительно наибольший.

Но даже если «жадный алгоритм» не срабатывает, то может сработать небольшое «отклонение от жадности». Скажем, делаем «жадными» все шаги, кроме одного. Или, для целых чисел, показываем, как достичь результата, следующего за жадным (скажем, отличающегося от «жадного» на 1).

6.7. Найдите самое маленькое число с суммой цифр 55.

Ответ: 1999999.

Решение. Число тем меньше, чем меньше в нем цифр. Чтобы достичь заданной суммы меньшим числом цифр, нужны цифры побольше, то есть надо брать девятки. Так, выставляя по одной, наберем шестью девятками сумму 54. Чтобы получить 55, припишем где-нибудь 1. При таком приписывании число будет наименьшим, если приписывать 1 спереди.

Докажем теперь строго, что меньше получить нельзя. Если цифр меньше, то сумма будет не более $6 \cdot 9 = 54$. Если цифр семь, но первая не 1, то число будет больше. Если цифр семь и первая — единица, то остальные будут девятки: как раз наше число. Наконец, если цифр восемь, то число будет больше, чем 1999999.

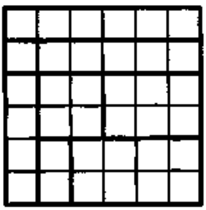
Замечание. Обычно школьники проговаривают ответ и только первый абзац рассуждения. Тут надо им объяснить, что без аккуратного рассмотрения случаев это не может считаться полным доказательством. Почему, например, если брать сначала не все девятки, не получится как-нибудь меньшее число с той же суммой?

6.8. а) Можно ли клетчатый квадрат 6×6 разрезать по границам клеток на 9 прямоугольников, среди которых нет равных (совпадающих при наложении)?

б) А на 8 таких прямоугольников?

Ответ: а) нельзя; б) можно.

Решение. а) Общее число клеток фиксировано, поэтому надо брать прямоугольники с меньшей площадью (в клетках), чтобы получить большее количество. Для каждого значения n площади есть прямоугольник размера $1 \times n$. Кроме того, для составных n есть еще прямоугольники: 2×2 для $n = 4$; 2×3 для $n = 6$. Сумма даже девяти самых маленьких площадей равна $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 = 38 > 36$, поэтому на 9 прямоугольников разрезать не получится.



б) Попробуем взять 8 самых маленьких площадей: $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 < 36$. Не хватает 5 клеток, но кто нам мешает увеличить один из прямоугольников. Например, $1 + 2 + 8 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 36$ (мы заменили 3 на $8 = 2 \times 4$). Разрезание с такими значениями площади подбирается, см. рис.

6.9. В фирме работают 100 сотрудников. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой может быть наибольшая разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников измеряются целым числом долларов и различны?

Ответ: 149 долларов.

Решение. 100 человек по кругу образуют 100 промежутков между соседями. Назовем сотрудника с наибольшей зарплатой Босс, а с наименьшей — Клерк. Они разбивают круг на две дуги, на которых в сумме 100 промежутков. По принципу Дирихле на одной из дуг лежит не более $100 : 2 = 50$ промежутков. Идя от Клерка к Боссу вдоль этой дуги, увеличим зарплату не более 50 раз по 3 доллара, то есть не более чем на 150 долларов.

Но может ли быть разница ровно 150? Тогда промежутков должно быть ровно по 50 на обеих дугах и при движении от Клерка к Боссу по любой из дуг зарплата должна расти на 3 на каждом промежутке. Но тогда у обоих соседей Клерка зарплаты одинаковы: противоречие.

Следующая после 150 разница 149 возможна: например, наименьшая зарплата 1000, наибольшая — 1149, с одной стороны между Клерком и Боссом сидят (по порядку) сотрудники с зарплатами 1002, 1005, 1008, ..., 1146, 1149, по другую — с зарплатами 1003, 1006, ..., 1147, 1149.

См. также задачи Д6.9, Д6.11, Д6.18, Д6.19, Д6.21.

Неравенства: от противного и перебор

При доказательстве принципа Дирихле было использовано рассуждение «от противного». Этот прием часто применяется при работе с неравенствами, поскольку при отрицании неравенство тоже переходит в неравенство. Ясно, однако, что знак неравенства меняется на противоположный. Но стоит обратить внимание на то, что при этом *строгое неравенство переходит в нестрогое* и наоборот. Например, если неверно, что $x > 6$, то верно, что $x \leqslant 6$.

Используется и перебор. Типично рассмотреть три случая: x меньше, больше или равно чему-то. Например, угадав ответ $x = 6$, рассматривают случаи $x = 6$, $x < 6$ и $x > 6$; и, например, показывают, что первый случай подходит, а остальные два сводятся к противоречию.

Другой удобный случай, когда x — целое число, а два неравенства ограничивают его с двух сторон. Тогда количество возможных значений x конечно. И если это количество мало, то нетрудно бывает их перебрать и отсеять лишние.

6.10. Кучу из 20 орехов разложили на несколько кучек с разным числом орехов. Докажите, что получилось не более пяти кучек.

Решение. Если бы кучек было не менее шести, то число орехов в них было бы не меньше суммы шести наименьших натуральных чисел, то есть не меньше $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

6.11. Каждый член семьи выпил по одинаковой чашке кофе с молоком, причем Катя выпила четверть всего выпитого молока и шестую часть всего выпитого кофе. Сколько человек в семье?

Ответ: 5 человек.

Решение. Для 5 человек такое возможно. Пусть, например, было 400 мл молока и 600 мл кофе, Катя выпила по 100 мл того и другого, а остальные все смешали и выпили по 200 г смеси.

Допустим, в семье не более 4 человек. Тогда 4 Катины порции по объему не меньше всего выпитого. Однако они включают все кофе и только $\frac{4}{6}$ всего молока, то есть *меньше* всего выпитого. Противоречие.

Допустим, в семье не менее 6 человек. Тогда 6 Катиных порций по объему не больше всего выпитого. Однако они включают все молоко и $\frac{6}{4}$ всего кофе, то есть *больше* всего выпитого. Противоречие.

6.12. По итогам игры восьми командам раздали 97 книг. За более высокое место давали больше книг. Все получили разное число, причем лучшая команда получила меньше, чем две последние вместе. Сколько книг получила каждая из команд?

Ответ: 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 и 16.

Решение. Пусть лучшая, предпоследняя и последняя команды получили соответственно a, y и z книг. Если $a \leqslant 15$, то всего команды получили

$$97 \leqslant 15+14+13+12+11+10+9+8=92$$

книги — противоречие. Значит, $a \geqslant 16$. Из неравенств $y+z>a \geqslant 16$ следует, что $y+z \geqslant 17$. Если $y \geqslant 11$, то

$$97 \geqslant z+11+12+13+14+15+16+17=z+98$$

— противоречие. Если $y=10$, то, ввиду того, что $y+z \geqslant 17$, получаем, что $z \geqslant 7$, откуда

$$97 \geqslant 7+10+11+12+13+14+15+16=98$$

— опять противоречие. Значит, $y \leqslant 9$, $z \leqslant 8$, и из неравенства $9+8 \geqslant y+z>a \geqslant 16$ ясно, что $y=9$, $z=8$, $a=16$. Между y и a есть пять различных искомых чисел, а всего между 9 и 16 шесть целых чисел. Значит, не использовано ровно одно. Добавив его, получим сумму

$$8+9+10+11+12+13+14+15+16=108,$$

что на 11 больше 97. Значит, мы добавили число 11. Отбросив его, получим ответ.

Замечание. Это «арифметическое» решение для семиклассников. Понятно, что использование алгебраических неравенств укоротит решение вдвое.

См. также задачи Д6.6, Д6.10, Д6.12, Д6.14, Д6.16, Д6.19б, Д6.22б.

Оценка

Под *оценкой* мы понимаем неравенство, ограничивающее значение величины сверху или снизу (например, периметр прямоугольника с целыми сторонами не меньше 4). Величина обычно связана с конструкцией или набором конструкций. Оценку часто доказывают сразу для всех конструкций набора (например, для всех клетчатых фигур, вырезанных из квадрата 8×8, их площадь не превосходит 64). Получение оценок обычно является частью более сложной задачи. В частности, оценки используют для доказательства невозможности (например, если площадь клетчатой фигуры больше 64, то невозможно вырезать эту фигуру из квадрата 8×8).

В сущности, на практике неравенства нужны почти исключительно для нахождения оценок. Соответственно, нахождение оценок стимулирует обучение работе с неравенствами и их применению. В задачах для младших школьников для нахождения оценки часто используется принцип Дирихле.

6.13. Нечетное число делится на 35. Докажите, что сумма его цифр не менее 6.

Решение. Это число делится на 5, поэтому его последняя цифра равна 5. Но число как минимум двузначно, поэтому первая цифра добавит как минимум 1. Итого сумма цифр не меньше $1+5=6$.

6.14. В мешке лежат конфеты трех видов: шоколадные, ириски и леденцы. Известно, что если вынуть любые 100 конфет из мешка, то среди них обязательно найдутся конфеты всех трех видов. Докажите, что в мешке не более 149 конфет.

Решение. Пусть в мешке x конфет. Тогда конфет какого то вида не более $\frac{x}{3}$, а конфет остальных двух видов вместе — не менее $\frac{2x}{3}$.

Если $\frac{2x}{3} \geqslant 100$, то можно вынуть 100 конфет этих двух видов — противоречие. Значит, $\frac{2x}{3} < 100$, откуда $x < \frac{3}{2} \cdot 100 = 150$. Следовательно, $x \leqslant 149$.

6.15. Клетчатый многоугольник состоит из 100 клеток со стороной 1. Докажите, что его периметр не более 202.

Решение. Пронумеруем клетки многоугольника от 1 до 100: номер 1 — любая клетка, а каждый следующий номер ставим в свободную клетку, соседнюю по стороне с какой-нибудь из уже занумерованных. При этом будем следить за периметром, ограничивающим фигуру из уже занумерованных клеток. У фигуры из первой клетки периметр 4, а далее на каждом шаге он увеличивается не больше чем на 2. Действительно, у добавленной клетки одна сторона уже была учтена, более того, она попадет внутрь фигуры, поэтому вычтется, а добавится не более трех сторон. Итого общий периметр не превосходит $4 + 2 \cdot 99 = 202$.

Замечание. Разумеется, для n клеток периметр многоугольника не более $2n + 2$.

См. также задачи Д6.2, Д6.4, Д6.11, Д6.17.

Оценка + пример

Эти задачи очень полезны начинающим: они учат смотреть на одну и ту же ситуацию с двух сторон. *Пример*, как правило, состоит из конкретной конструкции, заданной картнной или несколькими числами. Для примера надо доказать, что он подходит, то есть удовлетворяет всем условиям задачи, кроме минимальности или максимальности. *Оценка* доказывает минимальность или максимальность. Чтобы ее доказать, надо показать одно из двух: либо что для всех конструкций искомое значение лежит по нужную сторону от ответа (то есть всегда не больше или всегда не меньше)либо что все конструкции с большим (или меньшим) значением параметра невозможны или не подходят.

6.16. Электронные часы показывают цифры часов и минут (например, 13:10). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах?

Ответ: 24.

Решение. Пример. В 19:59 сумма цифр равна $1+9+5+9=24$. *Оценка.* Первая цифра не превосходит 2, вторая $\leqslant 9$, третья не превосходит 5, четвертая не превосходит 9, поэтому сумма цифр не превосходит $2+9+5+9=25$. Но значение 25 недостижимо: для этого все цифры должны принять максимальное значение, однако часы не могут показать время 29:59. Поскольку сумма цифр целая, она меньше как минимум на 1, то есть не больше 24.

Замечание. В подобных задачах наибольшая сумма цифр часто достигается для наибольшего возможного значения. Данная задача помогает развеять заблуждение, что это всегда так.

6.17. Найдите наибольшее простое число, которое не равно сумме двух составных.

Ответ: 11.

Решение. Пример. Докажем, что число 11 подходит. Оно простое. Выпишем все представления 11 в виде суммы двух натуральных:

$$1+10,\ 2+9,\ 3+8,\ 4+7,\ 5+6.$$

В каждом из них есть либо простое слагаемое, либо слагаемое 1. *Оценка.* Если p — простое число, $p>11$, то p нечетно и $p\geqslant 13$. Но тогда $p=9+(p-9)$. Число 9 составное, а $p-9$ не меньше 4 и четно, поэтому оно тоже составное.

6.18. Кузнец сделал набор из четырех железных и одной золотой гирьки, где золотая по весу не меньше каждой из железных. Известно, что любой целый вес от 5 г до 10 г можно набрать одной или несколькими гирьками набора. Какое наименьшее количество золота мог потратить кузнец?

Ответ: 2,5 г.

Решение. Пример: 1, 2, 2, 2,5 и 2,5 г. *Оценка.* Общий вес гирь не меньше 10 г. Можно выбрать группу весом 5 г. Тогда группа оставшихся гирь весит не меньше 5 г. В какой-то из двух групп не больше двух гирь, поэтому самая тяжелая из них весит не менее 2,5 г. Значит, и золотая гиря весит не менее 2,5 г.

См. также задачи 2.18, 3.21, Д5.12, Д5.15, Д5.20б, в, Д6.6, Д6.9, Д6.10, Д6.12, Д6.14, Д6.15, Д6.16, Д6.18, Д6.19, Д6.20, Д6.21в, Д6.22б.

Дополнительные задачи

Д6.1. а) В школе 400 учеников. Докажите, что у кого-то из них дни рождения совпадают.

б) В школе 1100 учеников. Докажите, что у каких-то четырех из них дни рождения совпадают.

Д6.2. Сумма семи различных натуральных слагаемых равна 40. Докажите, что у каких-то двух из этих слагаемых есть общий делитель больший 1.

Д6.3. Разложите 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в них было разное число орехов, но никакую из кучек нельзя было бы разбить на две так, чтобы число орехов во всех 11 кучках оставалось различным.

Д6.4. 2013 долларов разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой не разрешается.)

Д6.5. Разрежьте квадрат на равные треугольники и сложите из них два меньших неравных квадрата.

Д6.6. В треугольнике все углы измеряются целым числом градусов, причем все цифры в записи углов различны. Каков наибольший возможный НОД величин углов?

Д6.7. Запишите в строку 60 различных двузначных чисел так, чтобы для любой группы из нечетного числа подряд записанных чисел ее среднее арифметическое было целым.

Д6.8. На параде кавалеры ордена Славы выстроились в виде квадрата $n \times n$. У каждого кавалера на груди 1, 2 или 3 ордена Славы. Дотошные пионеры посчитали число орденов в каждом ряду из n человек: в колоннах, в шеренгах и в двух диагоналях. Могут ли все эти числа быть различными?

Д6.9. $ABCD$ — квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C?

Д6.10. У Артура есть двое часов, идущих неправильно. Каждые показывают время четырьмя цифрами: часы (от 00 до 23) и минуты (от 00 до 59). В некоторый момент Артур обнаружил, что на часах горят 8 различных цифр. Какой может быть наибольшая сумма этих восьми цифр?

Д6.11. Имеется 19 гирек весов 1, 2, 3, ..., 19 г, из них 9 железных, девять бронзовых и одна золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

Д6.12. Сумма трех натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться их произведение?

Д6.13. Квадрат разрезали девятью горизонтальными и девятью вертикальными прямыми на сто прямоугольников. Оказалось, что ровно девять из них — квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.

Д6.14. Имеется кучка из 100 орехов. За одну операцию разрешается любую из имеющихся кучек разделить на две. Если при этом образовались две неравные кучки, то взимается штраф 1 рубль. Какова наименьшая возможная сумма штрафа, которую придется заплатить, чтобы получить 100 кучек по одному ореху в каждой?

Д6.15. У первоклассника имеется сто карточек, на которых написаны числа от 1 до 100, а также большой запас знаков «+» и «=». Какое наибольшее число верных равенств он может составить? (Каждая карточка используется не более одного раза, в каждом равенстве может быть только один знак «=», переворачивать карточки и прикладывать их для получения новых чисел нельзя.)

Д6.16. В ящике лежат 100 шариков белого, синего и красного цвета. Известно, что если, не заглядывая в ящик, вытащить 26 шариков, то среди них обязательно найдутся 10 шариков одного цвета. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 30 шариков одного цвета?

Д6.17. Отрезок единичной длины разбили на 11 отрезков, длина каждого из которых не превосходит a. При каких значениях a можно утверждать, что из любых трех получившихся отрезков можно составить треугольник?

Д6.18. В таблице 10×11 расставлены числа 0, 1, 2 так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке делится на 3. Какое наибольшее возможное количество единиц может быть в этой таблице?

Д6.19. Есть мешок орехов и коробка с одним орехом. За одну операцию можно добавить в коробку один орех или удвоить в ней число орехов. За какое наименьшее число операций можно получить в коробке

а) ровно 10 орехов;

б*) ровно 100 орехов?

Д6.20. Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовем такие куски стандартными).

Некоторый моток веревки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартиых кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

Д6.21. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, −2, −3, 4, −5, 7, −8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Д6.22. В группе 20 учащихся. Каждый сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе?

Ответы и решения

Д6.1. Построим 366 клеток, напишем на каждой свое число и месяц и рассадим учеников по клеткам в соответствии с их днями рождения.

а) Поскольку $400 > 366$, по принципу Дирихле в какую-то клетку попадут минимум двое учеников. Их дни рождения совпадают.

б) Поскольку $\frac{1100}{366} > 3$, по принципу Дирихле в какую-то клетку попадут не менее $\frac{1100}{366}$ учеников. Наименьшее целое число, не меньшее $\frac{1100}{366}$ — это число 4. Значит, в какой-то клетке будет не менее 4 учеников, их дни рождения совпадают.

Д6.2. *Решение.* Допустим, общих делителей нет. Среди слагаемых не более чем одно равно 1. Заменим каждое из слагаемых на какой-нибудь из его простых делителей. Тогда сумма может только уменьшится. Два числа не могут замениться на одинаковые, иначе это одинаковое число было бы общим делителем. Полученная сумма не меньше 1 плюс сумма шести наименьших простых чисел, то есть не менее чем $1+2+3+5+7+11+13=42$. Это уже больше 40. Противоречие.

Д6.3. *Ответ*: положим в кучки 1, 3, 5, 7, ..., 19 орехов.

Решение. Кучку из одного ореха разбить на две нельзя, а при попытке разбить другую кучку из нечетного числа орехов в одной из частей окажется меньшее нечетное число орехов, что и даст совпадение.

Д6.4. *Ответ*: верно.

Решение. Пусть кошельков M, а карманов N. В каждом кармане меньше M долларов, поэтому всего долларов меньше MN. По принципу Дирихле в одном из кошельков меньше чем $MN : M = N$ долларов.

Д6.5. Разрежем квадрат на 25 одинаковых квадратиков, а каждый квадратик разобьем диагональю на два равных треугольника. Не отделяя друг от друга треугольники с общей диагональю, сложим из квадратиков два квадрата 4×4 и 3×3.

Д6.6. *Ответ*: $18°$.

Решение. Оценка. Напомним, что сумма углов треугольника равна $180°$. Так как общий делитель слагаемых является делителем суммы, НОД трех чисел — градусных мер углов — должен быть делителем числа $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Однако если НОД делится на 5, то среди этих чисел найдутся либо два числа, оканчивающиеся на 0, либо два числа, оканчивающиеся на 5. Значит, НОД на 5 не делится, то есть является делителем числа 36.

Допустим, что он равен 36. Запишем равенство, выражающее сумму углов треугольника, и почленно разделим его на 36. Получим сумму трех чисел, равную 5. В ней два слагаемых равны. Значит, и до деления на 36 два слагаемых были равны — противоречие. Следовательно, НОД < 36.

Наибольший из собственных делителей числа 36 равен 18.

Пример. В треугольнике с углами 36°, 54° и 90° НОД равен 18°.

Д6.7. *Ответ*: например, 10, 11, 12, ..., 69.

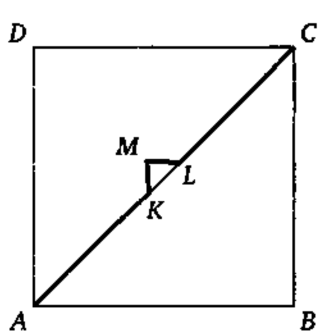
Решение. Пусть из указанного ряда последовательных чисел выбрана группа из нечетного числа подряд записанных чисел. Тогда в ней есть среднее число s, справа и слева от которого чисел группы поровну. Тогда остальные числа можно разбить на пары равноотстоящих от s: пара соседних с s, пара через одно от s, и т. д. Поскольку числа последовательны, то правое число пары на столько же больше s, на сколько левое меньше s. Если заменить оба числа пары на s, сумма не изменится. Заменим так на s числа во всех парах. Количество чисел и их сумма не изменилась, значит, не изменилось и их среднее арифметическое. Но теперь все числа равны s, значит, и среднее арифметическое равно s. А это число целое, что и требовалось доказать.

Д6.8. *Ответ*: нет.

Решение. Наименьшее число орденов в ряду равно n, а наибольшее —$3n$. Значит, всего есть $3n - n + 1 = 2n + 1$ различных значений (эффект плюс-минус 1). А рядов больше: n шеренг, n колонн и 2 диагонали, то есть всего $2n + 2$. По принципу Дирихле в каких-то двух рядах числа совпадут.

Д6.9. *Ответ*: за 12.

Решение. По теореме Пифагора кратчайшее расстояние между A и C равно $\sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{128} > \sqrt{121} = 11$. Поэтому 11 шагов не хватит. Покажем, как пройти за 12 шагов. Заметим, что $AC = \sqrt{121} <$ $< \sqrt{144} = 12$. Сделаем по 5 шагов вдоль диагонали AC из каждого конца. Получим на диагонали точки K и L, при этом $AK = LC = 5$, поэтому $KL < 12 - 5 - 5 = 2$.



Значит, можно построить треугольник KLM со сторонами $KM = ML = 1$. Ломаная $AKMLC$ лежит внутри квадрата, ее длина равна 12, а длины всех звеньев целые.

Путь к решению. Для поиска пути применим *жадный алгоритм*. Пойдем из A в C по прямой. После 10 шагов попадем в точку E, при этом $EC < 2$. Значит, можно построить треугольник EFC со сторонами $EF = FC = 1$. Путь по ломаной $AEFC$ состоит из 12 шагов. Непонятно только, лежит ли точка F внутри квадрата. Чтобы не тратить сил на выяснение, просто перенесем два шага, отклоняющиеся от прямой, в середину пути.

Д6.10. *Ответ*: 40.

Решение. Пример. Часы показывают 19:58 и 07:46, сумма цифр 40.

Оценка. Ясно, что первая цифра на часах не более 2, третья — не более 5. Разберем два случая.

Случай 1. Первая цифра на одних часах равна 2. Тогда вторая цифра на этих часах не больше 3. Поэтому сумма первых цифр не больше $1 + 2 = 3$, сумма третьих цифр не больше $4 + 5 = 9$, сумма вторых и четвертых не больше $3 + 7 + 8 + 9 = 27$. Значит, общая сумма не больше 39.

Случай 2. Обе первые цифры меньше 2. Тогда сумма первых цифр равна $0 + 1 = 1$, сумма третьих цифр не больше $4 + 5 = 9$, сумма вторых и четвертых не больше $6 + 7 + 8 + 9 = 30$, а общая сумма не больше 40.

Д6.11. *Ответ*: 10 г.

Решение. Как получить наибольшую разность весов железных и бронзовых гирек? Жадный алгоритм подсказывает: сделать железными самые тяжелые, а бронзовыми — самые легкие. Тогда разность будет равна $(19 + 18 + \ldots + 11) - (9 + 8 + \ldots + 1) = 90$ г, а в остальных случаях — меньше. Но по условию меньше 90 г разность быть не может. Поэтому железные гири — самые тяжелые, а бронзовые – самые легкие. Значит, золотая гирька весит 10 г.

Д6.12. *Ответ*: на 6 нулей.

Решение. Пример: $320 + 125 + 75 = 520$, $320 \cdot 125 \cdot 75 = 3000000$.

Оценка. Предположим, что нулей не менее 7. Тогда произведение делится на $10^7 = 2^7 \cdot 5^7$. Как эти 7 пятерок могли распределиться между сомножителями? Ни в какой из них не попало 4 пятерки, так как тогда он был бы не меньше $5^4 > 520$. Все слагаемые не могут делиться на 25, так как сумма на 25 не делится. Значит, два слагаемых делятся на 125, а третье кратно 5. Кроме того, хотя бы два слагаемых четны (одно четное не может делиться на $5 \cdot 2^7$), то есть четны все три. Значит, среди слагаемых два делятся на 250. Если одно равно 500, то сумма больше 750. А если оба равны по 250, то $250 \cdot 250 \cdot 20$ делится только на 2^4.

Д6.13. Прямоугольники разбиения образуют десять строк и десять столбцов.

Разберем два случая.

Случай 1. Все девять квадратов разбиения находятся в девяти разных строках и девяти разных столбцах. Тогда сумма высот этих строк равна сумме ширин этих столбцов. Высота десятой строки и ширина десятого столбца получаются вычитанием этой суммы из стороны исходного квадрата, поэтому равны. Тогда на пересечении этих строки и столбца образуется десятый квадрат, что противоречит условию.

Случай 2. Какие-то два квадрата разбиения находятся в одной строке или одном столбце. Тогда они равны.

Д6.14. *Ответ*: 2 рубля.

Решение. Пример. Разделим в первый раз на кучки размера 36 и 64, второй раз — кучку размера 36 на кучки размера 32 и 4. Заплатили 2 рубля. Далее делим бесплатно пополам, так как кучки размера 2^n позволяют это делать до самого конца.

Оценка. Заметим, что если размер кучки — не степень двойки, то рано или поздно придется разделить на две неравные кучки. Если первым ходом мы разделим бесплатно, то образуются две кучки по 50. Но 50 — не степень двойки, поэтому за полное разделение каждой из кучек придется заплатить по рублю.

Если первый раз мы разобьем на неравные кучки, то уже заплатим рубль. При этом даже если размер левой кучки будет степенью двойки, то размер правой — нет. Достаточно проверить случаи размеров 1, 2, 4, 8, 16, 32 и 64 для левой кучки: размер правой будет 99, 98, 96, 92, 84, 68 или 36 соответственно.

Д6.15. *Ответ*: 33.

Решение. В равенстве участвуют не меньше трех чисел, поэтому больше 33 равенств быть не может. Покажем, как составить 33 равенства.

25 равенств: $49+51=100$, $47+52=99$, ..., $1+75=76$. Остались четные числа от 2 до 50. Еще 5 равенств: $18+30=48$, $14+32=46$, ..., $2+38=40$. Остались числа 4, 8, 12, 16, 20, 22, 24, 26, 28, 50. Еще 3 равенства: $4+12=16$, $8+20=28$, $24+26=50$.

Д6.16. *Ответ*: 66 шариков.

Решение. Докажем, что 66 шариков достаточно. Предположим противное: мы вынули 66 шариков, и среди них не нашлось 30 шариков одного цвета. Это значит, что среди выбранных шариков каждого цвета не более 29. Выберем по 8 шариков каждого цвета и добавим к ним любой шарик. Пусть он, скажем, красный. Тогда можно добавить белый или синий (их пока выбрано 16, а всего — не менее 37). Получим набор из 26 шариков, где шариков каждого цвета меньше 10. Противоречие возникло из предположения, что нет 30 шариков одного цвета. Значить, они есть.

Докажем, что 65 шариков может не хватить. Пусть, например, в ящике лежат 7 белых, 46 синих и 47 красных шариков. Это удовлетворяет условиям. Действительно, в любом наборе из 26 шариков белых не более 7, поэтому синих и красных — не менее 19. По принципу Дирихле из этих 19 шариков не меньше 10 шариков одного цвета.

Однако среди 65 выбранных шариков может оказаться 7 белых и по 29 синих и красных, то есть 30 шариков одного цвета не будет!

Д6.17. *Ответ*: при $\frac{1}{11} \leqslant a < \frac{1}{10}$.

Решение. По принципу Дирихле длина хотя бы одного отрезка не меньше $\frac{1}{11}$, поэтому $a \geqslant \frac{1}{11}$. При $a < 0{,}1$ сумма длин любых девяти отрезков меньше 0,9. Тогда сумма любых двух отрезков равна $1-$(сумма девяти остальных), а это больше чем $1-0{,}9=0{,}1>a$, то есть больше длины любого из оставшихся отрезков.

Для $a \geqslant 0{,}1$ строится коитрпример: разбиение на 9 отрезков длины 0,1 и два — длины 0,05. Все отрезки не длиннее a, при этом треугольник из отрезков 0,5, 0,5 и 1 не строится.

Д6.18. *Ответ*: 96 единиц.

Решение. Оценка. Пусть в таблице n нулей и d двоек. У нас есть 10 строк длины 11 и 11 столбцов длины 10. Чтобы сумма в строке делилась на 3, там должна быть хотя бы одна двойка или два нуля. Обведем в каждой строке двойку, а если двоек нет, то два нуля. Пусть всего обведено d' двоек и n' нулей. Мы обвели числа в каждой строке, поэтому $d' + \frac{n'}{2} = 10$. Однако $n' \leqslant n$, $d' \leqslant d$, поэтому $d + \frac{n}{2} \geqslant 10$. Аналогично в каждом столбце должен быть нуль либо не менее 2 двоек, поэтому $n + \frac{d}{2} \geqslant 11$. Сложив неравенства, получим $\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}d \geqslant 21$. Отсюда $n + d \geqslant 14$, то есть не единиц в таблице минимум 14. Тогда единиц — максимум $10 \cdot 11 - 14 = 96$.

Пример. См. таблицу.

2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Комментарий. Каждая не единица стоит на пересечении двух рядов — строки и столбца. Она обеспечивает делимость на 3 одного ряда полностью и половины другого ряда. Так как всего у нас $10 + 11 = 21$ ряд и каждая единица обслуживает полтора ряда, всего нужно не менее $21 : 1{,}5 = 14$ не единиц. Пример строится по жадному алгоритму: мы расставляем нули и двойки так, чтобы каждая из этих цифр обслуживала ровно полтора ряда.

Д6.19. *Ответ*: а) За 4. б) За 8.

Решение. а) *Пример*: $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 10$. *Оценка.* Добавление одного ореха дает не больше чем удвоение. Но даже три удвоения дадут только 8 орехов, что меньше 10. Поэтому трех операций не хватит.

б) *Пример*: $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 12 \to 24 \to 25 \to 50 \to 100$. *Оценка.* При обратном ходе орехи делятся пополам или вычитается 1 орех, а мы из 100 получаем 1. Есть такой жадный алгоритм: четное число орехов делим на 2, а из нечетного вычитаем 1 (переход $2 \to 1$ считаем делением). В частности, вышеприведенный пример получен этим алгоритмом. Докажем, что алгоритм дает минимум операций. Рассуждаем от противного: покажем, что если действовали не по алгоритму, то число операций можно уменьшить. Отступить от алгоритма мы могли, только вычтя 1 из четного числа $2n \geqslant 4$. Тогда мы должны были вычесть еще раз (нечетное число на 2 делить нельзя). Если мы больше никогда не делили, то перешли от $2n$ к n за $n \geqslant 2$ операций, а могли перейти за одну. Если же мы сделали деление, то пусть впервые это случилось с числом $2n-2k$ ($k \geqslant 1$). Тогда мы перешли от $2n$ к $n-k$ за $2k+1$ операцию. Но то же можно было сделать за $k+1$ операцию: сначала поделить, а потом k раз вычесть:

$$2n \to n \to n-1 \to \ldots \to n-k.$$

Д6.20. *Ответ*: на 23.

Решение. Пусть длина мотка равна L см. Она равна сумме длин 23 стандартных кусков. Ясно, что сумма, а значит, и L удовлетворяют неравенству $115 \cdot 23 < L < 120 \cdot 23$ (неравенства строгие, поскольку хотя бы один из неравных кусков короче 120 см и хотя бы один — длиннее 115 см).

Пример. Разрезание на 23 равных стандартных куска возможно. Ведь тогда длина куска будет $\frac{L}{23}$ и, разделив предыдущее неравенство почленно на 23, получим $115 < \frac{L}{23} < 120$, то есть куски стандартные. *Оценка.* Если же мы разрежем на $n \geqslant 24$ равных куска, то их длина будет меньше стандартной: $\frac{L}{n} \leqslant \frac{L}{24} < 120 \cdot \frac{23}{24} = 115$ см.

Д6.21. *Ответ*: а) нет; б) нет; в) 4.

Решение. а) Произведение равно 0, только если какой-то из сомножителей равен 0. Однако сумма любых двух чисел из первой и второй группы не равна 0, так как среди восьми данных чисел нет противоположных. Поэтому и все произведение не равно 0.

б) Рассмотрим пять карточек, у которых на лицевой стороне написаны нечетные числа. Не у всех из них на обратной стороне написаны четные числа, так как на обратных сторонах карточек всего три четных числа. Поэтому найдется карточка, у которой с обеих сторон написаны нечетные числа. Тогда сумма чисел на ней четна. При умножении этого четного числа на остальные суммы мы получим четное число. Значит, произведение не равно 1.

в) Из 16 записанных чисел всего 6 четных. Значит, из 8 карточек найдутся две без четных чисел. На них записаны по 2 нечетных числа, значит, сумма на каждой из этих карточек четна. Но тогда все произведение будет делиться на 4. Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, — это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: $(1; -2)$, $(-2; 1)$, $(-3; 4)$, $(4; -3)$, $(-5; 7)$, $(7; -5)$, $(-8; 9)$, $(9; -8)$.

Путь к решению. При разложении 4 в произведение восьми множителей у нас должно быть ровно два четных множителя, а остальные нечетны. Если отбросить знаки, то четные множители должны быть равны 2, а нечетные — 1, иначе произведение по модулю будет слишком большим. Жадный алгоритм подсказывает нам группировать числа в пары с маленькими по модулю суммами.

Д6.22. *Ответ*: а) да; б) 10.

Решение. а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Действительно, доля мальчиков, посетивших кино, равна $\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = \frac{15}{40} < \frac{2}{5} = \frac{16}{40}$, а доля мальчиков, посетивших театр, равна $\frac{4}{14} < \frac{4}{13}$. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то их доля была бы не меньше $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9} = \frac{7}{16} > \frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

КОНТРОЛЬ И ОТЛАДКА РЕШЕНИЙ

Решение сложных задач состоит из нескольких шагов. И даже если каждый шаг сам по себе прост, выполнить всю цепочку безошибочно не так легко. Простое увеличение аккуратности и внимательности не слишком помогает. Опытный бегун понимает, что пробежать километр — это не то же, что 10 раз пробежать стометровку. Так же и опытный решатель знает, что длинные вычисления надо выполнять не так, как короткие: их надо *организовать* и *проверить*.

Вот несколько советов.

1. Разделите решение на несколько логических частей. Каждая часть должна решать отдельную подзадачу. Надо (хотя бы для себя) четко сформулировать, какую именно подзадачу вы решаете и что именно должны получить в конце. Четко проговаривать полезно даже отдельные шаги: см., например, решение задачи 2.9.

2. Если есть сомнение в каком-то шаге, подумайте, как его проверить. Например, полезно чувствовать ситуации с «эффектом плюс-минус один» (см. задачи 1.1, 1.10, 1.13, Д1.1, Д1.5–Д1.8), когда вы «в принципе правильно» знаете, что делать, но можете ошибиться на 1. Устройте *отладку*: решите для проверки тем же способом задачку с маленькими числами, где ответ можно «проверить руками». Например, надо узнать, сколько дней с 7-го по 28-е мая включительно. Вам кажется, что $28 - 7 = 21$ день. Изменим условие: сколько дней с 7-го по 8-е включительно? По той же схеме $8 - 7 = 1$ день, но непосредственно видно, что дней два: 7-е и 8-е. Дальше можно предположить, что мы просто недоучитываем один день, добавить его и получить $21 + 1 = 22$ дня. Это верно, но надежнее разобраться, откуда ошибка, и исправить ее (см. задачу 1.1).

3. *Отладкой* можно проверять и решения задач другого типа (см. задачу 1.2), в том числе более сложных. Проще всего проверяется ответ в виде формулы. Подставив вместо буквенных значений числовые, мы получим числовой ответ. Надо только подобрать такие числа, чтобы задача с ними легко решалась. Точно так же можно восстановить точный вид формулы, которую вы помните приблизительно. Пусть, например, вы засомневались, равна ли сум-

ма $1+2+\ldots+n$ выражению $\frac{n(n-1)}{2}$ или $\frac{n(n+1)}{2}$? Подставив $n=2$, вы сразу увидите, что правильный ответ дает вторая формула!

4. Решение задачи или подзадачи можно проверить, решив ее *двумя способами* (см., например, задачу 2.1).

5. Громоздкие вычисления с целыми числами можно проконтролировать, *вычислив последнюю цифру* результата (как мы делали в задаче 3.16).

6. Вычисления контролируют с помощью *оценок*. Скажем, перемножив два трехзначных числа, вы получили четырехзначное число. Тут что-то не так. Ведь оба сомножителя не меньше 100, поэтому произведение не меньше 10 000 — уже пятизначное число!

Осознав важность самоконтроля, вы наверняка придумаете много способов дополнительной проверки и сможете заметно повысить надежность своих выкладок. Помните «правило альпинистов»: на вершину взойдет не тот, кто не поскальзывается, а тот, кто, поскользнувшись, сумеет подняться и пойти дальше. Успешных вам «восхождений»!

ЗАДАЧИ С6 ЕГЭ

Д3.24, Д3.25, Д3.26, Д5.20, Д5.21, Д6.20, Д6.21, Д6.22.

ОГЛАВЛЕНИЕ